Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до практичних занять та самостійної роботи
з дисципліни
«Функціональний аналіз»

для студентів спеціальності

014 «Середня освіта (Математика)»

Затверджено
на засіданні
методичної ради
Протокол № 8 від 20.05.2021

Краматорськ 2021

УДК 517

Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи з дисципліни «Функціональний аналіз» для студентів спеціальності 014 «Середня освіта (Математика)»/ Укл.: О. Г. Ровенська, В. М. Астахов. – Краматорськ: ДДМА, 2021. – 64 с.

Методичні вказівки «Функціональний аналіз» містять у стислому вигляді основний теоретичний матеріал з курсу функціонального аналізу, практичні вправи та методичні матеріали щодо організації самостійної роботи й комплексного контролю знань студентів. Призначений для студентів вищих навчальних закладів, викладачів математичних дисциплін.

Укладачі О. Г. Ровенська, доц.,
В. М. Астахов, доц.

Відпов. за вип. В. М. Астахов, доц.

ЗМІСТ

ВСТУП

Функціональний аналіз необхідний для фахівців різного профілю, які використовують у своїй діяльності математичний апарат. Пов'язано це з тим, що в даній галузі математики розроблено як різні прийоми наближеного розв'язання складних практичних проблем, так і методики оцінки похибок таких результатів. За останні десятиріччя функціональний аналіз настільки глибоко проник майже в усі галузі математики, що часом важко вказати межі цього розділу. У навчальні курси для студентів технічних, економічних та інформаційних напрямків традиційно включаються базові розділи функціонального аналізу: узагальнення геометричних понять відстані і кута, функціональні простори різної природи, елементи теорії лінійних операторів та теорії інтегральних рівнянь.

Основна мета даної розробки – показати на простих прикладах основні ідеї цієї досить складною, досить абстрактної математичної дисципліни. Для успішного сприйняття викладеного в цій брошурі матеріалу достатньо знань стандартного курсу вищої математики в технічних ВНЗ (аналітична геометрія, лінійна алгебра, математичний аналіз).

1 ПОНЯТТЯ МНОЖИНИ

1.1 Поняття множини

В математиці множини позначаються великими латинськими літерами A, B, C, ..., а елементи множини - малими x, y, z, ...

Порожня множина - це множина, яка не містить жодного елемента. Позначається Ø.

Множина A називається підмножиною множини B, якщо кожен елемент множини A належить множині B. Позначають $A \subset B$.

Приклади множин:

N – множина натуральних чисел;

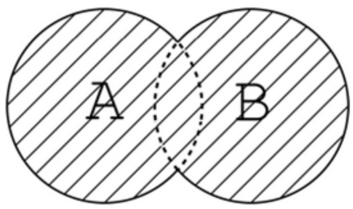
Q – множина раціональних чисел, $N \subset Q$;

Z – множина цілих чисел, $N \subset Z$, $Z \subset Q$;

R – множина дійсних чисел $Q \subset R$.

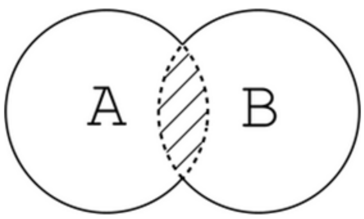
1.2 Операції над множинами

Сумою (об'єднанням) двох множин A і B називається множина, що складається з елементів, які входять хоча б в одну з множин A або B. Позначають $A \cup B$ (мал. 1.1).



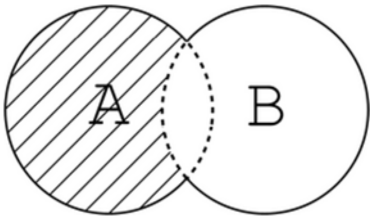
Малюнок 1.1

Перетином двох множин A і B називається множина, що складається з елементів, які входять в обидві множини A і B. Позначають $A \cap B$ (мал. 1.2).



Малюнок 1.2

Різницею двох множин A і B називається множина, елементи якої містяться в A, але не містяться в B. Позначають різницю множин (іноді застосовують позначення $A - B$) (мал. 1.3).



Малюнок 1.3

1.3 Класифікація точок числової прямої і координатної площини

Околом точки x_0 називається будь-яка множина $(\alpha;\beta)$, якій ця точка належить. Окіл на координатної площині - будь-яке коло без границі кола, що містить дану точку.

Точка називається *граничною* точкою множини, якщо будь-який її окіл містить, хоча б одну точку з цієї множини.

Внутрішньою точкою множини називається точка, що входить в цю множину з деяким своїм околом.

Ізольована точка - точка, у якій існує окіл, який містить інші точки цієї множини.

Гранична точка x_0 для множини A в будь-якому своєму околі містить і точки даної множини, відмінні від x_0, і точки, що не належать A (гранична точка може належати або не належати A).

Наприклад, $A:(-2;6]\cup[7]$. Всі точки $[-2;6]$ – *граничні* для A. Всі точки $(-2;6)$ – *внутрішні* для A. Точка x = 7 – *ізольована*, а точка x = 6 – *гранична*.

Завдання для самостійної роботи. Зобразити множини на координатній площині

$$A:\quad \{x=3\},$$
$$B:\quad \{y>1\},$$
$$C:\quad \{-4\le x<1;\ 0\le y\le 2\},$$
$$D:\quad \{2x+3y+6\ge 0\}.$$

Побудувати на координатній площині множини $B\cup C,\quad B\cap C,\quad B\setminus C.$

2 МЕТРИЧНИЙ ПРОСТІР

2.1 Поняття метрики. властивості

Метричний простір - це множина елементів, для кожної пари яких визначена функція $\rho(x, y)$ – метрика для елементів x, y метричного простору.

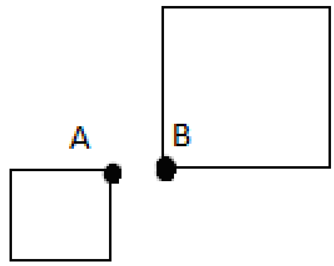
Метрика – двомісна операція, що має властивості:

1. $\rho(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$ (аксіома тотожності).

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксіома симетричності).

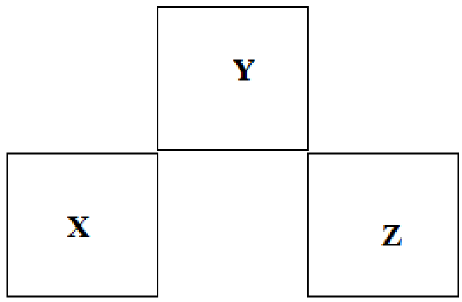
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (аксіома трикутника).

Правильно ввести метрику не так просто. Розглянемо на площині множину квадратів, в якості метрики приймемо найменшу відстань між точками з A і точками з B (мал. 2.1).



Малюнок 2.1

У цій множині не виконуються перша і третя властивість метрики (мал. 2.2).



Малюнок 2.2

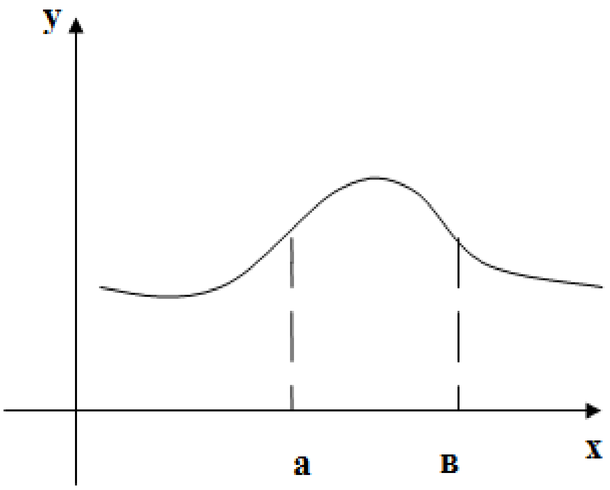
Дійсно:

1) $\rho(X, Y) = 0$, але при цьому $X \neq Y$;

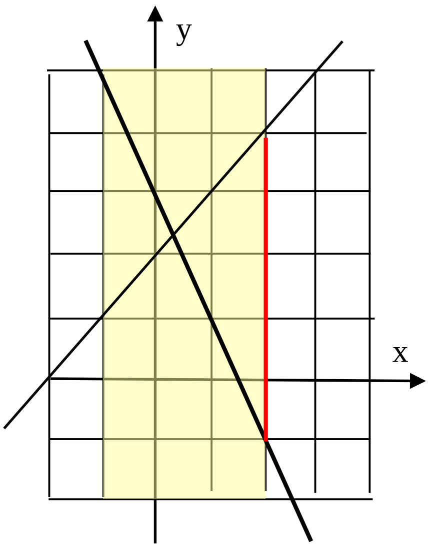
2) $\rho(X, Y) = 0$, $\rho(Y, Z) = 0$, $\rho(X, Z) \neq 0$, отже, аксіома трикутника не виконується $\rho(X, Y) + \rho(Y, Z) < \rho(X, Z)$.

Поняття метрики є узагальненням поняття відстані між точками точкової множини.

Розглянемо множину функцій, неперервних на інтервалі $[a,b]$. Така множина позначається $C_{[a,b]}$. Приклад неперервної на відрізку $[a,b]$ функції зображено на мал. 2.3, 2.4.



Малюнок 2.3



Малюнок2.4

Метрика в множині $C_{[a,b]}$ задається формулою:

$$\rho(f,g) = \max_{[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Покажемо, що всі властивості метрики виконуються:

1. З $\max|f(x)| = 0$ для $x \in [a;b]$, очевидно, слідує $f(x) \equiv 0$, тому з умови $\max\limits_{[a;b]} |u(x) - v(x)| = 0$ слідує що $u(x) \equiv v(x)$ на $[a;b]$.

2. Симетричність метрики є наслідком властивостей абсолютної величини $|-a| = |a|$.

3. Аксіома трикутника випливає з нерівності $|a-c| \le |a-b| + |b-c|$ для будь-яких дійсних чисел. Дійсно, якщо числа (a-b) і (b-c) одного знака або серед них є нуль, то буде рівність, а якщо знаки різні, то строга нерівність.

Приклад 2.1. Знайти метрику елементів $y_1 = 3 - 2x$, $y_2 = 2 + x$ простору $C_{[-1;2]}$.

Розв’язання. Так як графіками цих лінійних функцій є прямі лінії, то функції неперервні і належать простору $C_{[-1;2]}$. Різниця лінійних функцій також лінійна і екстремальні значення набуває на кінцях інтервалу (в тому числі і коли є константою). Тому достатньо обчислити відстань між графіками на кінцях інтервалу і вибрати з них найбільше (мал. 2.4).

$$\rho(y_1, y_2) = \max_{[-1;2]} |y_1(x) - y_2(x)| = |-1-4| = 5.$$

З математичного аналізу. Функція називається гладкою на інтервалі $[a, b]$*, якщо в кожній точці цього інтервалу існує похідна.*

Приклад 2.2. Знайти метрику в просторі $C_{[1;4]}$ елементів $y_1 = 4 - x$, $y_2 = x^2 - 5x + 5$.

Розв'язання. Для різниці гладких функцій знайдемо найбільше і найменше значення:

$$g(x) = y_1 - y_2 = 4 - x - x^2 + 5x - 5 = -x^2 + 4x - 1;$$

$$g'(x) = -2x + 4 = 0, \quad \to \quad x = 2;$$

$$g(2) = -4 + 8 - 1 = 3;$$

$$g(1) = -1 + 4 - 1 = 2;$$

$$g(4) = -16 + 16 - 1 = -1.$$

Тому,

$$\rho(y_1, y_2) = \max_{[1;4]} |y_1 - y_2| = 3.$$

Приклад 2.3. Зайти в просторі $C_{[-3;5]}$ метрику елементів U и V, побудувати їх графіки на одному кресленні і вказати відрізок, який визначає метрику.

$$\text{U:}\ y_1 = \frac{1}{3}|x| - \frac{2}{3}|x-3|, \qquad \text{V:}\ y_2 = \frac{2}{5}x - 1.$$

Розв'язання. Перетворимо формулу елемента U:

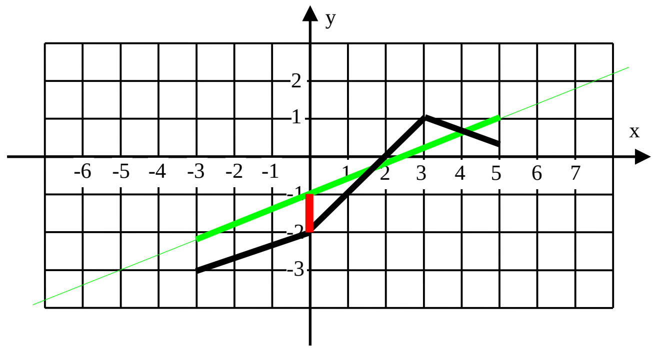
$$y_1 = \begin{cases} -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}(x-3) = \frac{1}{3}x - 2, & x < 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}(x-3) = x - 2, & 0 \le x \le 3 \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}(x-3) = -\frac{1}{3}x + 2, & x > 3 \end{cases}$$

На кожній частині інтервалу $[-3;5]$ функції $y_1(x)$ и $y_2(x)$ лінійні, тому екстремальні значення їх різниці можуть спостерігатися тільки в точках зламу графіка U і в граничних точках $[-3;5]$. Для розрахунків метрики і побудови графіків можна скласти таблицю (табл. 2.1)

Таблиця 2.1

x	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y_1 - y_2$	$\lvert y_1 - y_2 \rvert$
-3	-3	$-\frac{11}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$
0	-2	-1	-1	1
3	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$
5	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Максимальне з чисел останнього стовпчика і буде метрикою: $\rho(U,V)=1$. Побудуємо графіки (мал. 2.5).



Малюнок 2.5

2.2 Класифікація точок метричного простору

Околом елемента X метричного простору A називається множина елементів $\mathrm{Y} \in \mathrm{A}$, для котрих виконується нерівність $\rho(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ Ця множина, крім того, в метричних просторах називають ще й шаром радіуса ε, а елемент X - центр шару. Всі означення типів точок числової прямої (максимальна (гранична), внутрішня, межова, ізольована) зберігаються і для метричного простору. Тільки для метричних просторів кажуть не «точки», а «елементи»: внутрішній, граничний і т. д.

Приклад 2.4. Розглянемо сім'ю функцій:

$$y_t(x) = \begin{cases} -x - 6t + 2, & x \le 1 - t \\ x - t^2, & x > 1 - t \end{cases}$$

Назвемо A множину функції з цієї сім'ї, які належать простору $C_{[-5;0]}$. При кожному значенні параметра **t** функція **y,** можливо, має розрив. Якщо цей розрив поза сегментом $[-5;0]$ або функція неперервна, то функція належить простору $C_{[-5;0]}$, в іншому випадку - не належить $C_{[-5;0]}$. Неважко обчислити, що множина A визначається такою множиною параметра **t**: $(-\infty;1] \cup [4] \cup (6;\infty)$. Дослідимо характерні значення параметра.

1) **t** = 1:

$$y_1(x) = \begin{cases} -x - 4, & x \le 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases} \quad => \quad y_1(x) = -x - 4, \qquad x \in [-5;0].$$

Нехай $0 < \delta << 1$. Тоді

$$y_{1-\delta}(x) = \begin{cases} -x - 4 + 6\delta, & x \le \delta \\ x - 1 + 2\delta - \delta^2, & x > \delta \end{cases}.$$

Ця функція всюди неперервна, крім точки, яка розташована поза сегментом $[-5;0]$, отже, $y_{1-\delta}(x) \in \mathrm{A}$.

$$y_{1+\delta}(x) = \begin{cases} -x - 4 - 6\delta, & x \le -\delta \\ x - 1 - 2\delta - \delta^2, & x > -\delta \end{cases}.$$

Ця функція має розрив всередині сегмента і тому не належить множині А. Отже, $y_1(x)$ – це граничний елемент множини А, в будь-якому його околі є як елементи, що належать, так і не належать А.

2) **t** = 4:

$$y_4(x) = \begin{cases} -x-22, & x \le -3 \\ x-16, & x > -3 \end{cases}.$$

Ця функція неперервна для всіх x (в тому числі при $x=-3$), тому належить множині А. Але в малому околі цього елемента інших елементів з А немає. Дійсно,

$$y_{4+\delta}(x) = \begin{cases} -x-22-6\delta, & x \le -3-\delta \\ x-16-8\delta-\delta^2, & x > -3-\delta \end{cases};$$

$$\lim_{x\to -3-\delta-0} y_{4+\delta}(x) = -19-5\delta, \quad \lim_{x\to -3-\delta+0} y_{4+\delta}(x) = -19-9\delta-\delta^2 \ne -19-5\delta.$$

Розрив першого роду в точці $x=-3-\delta$, елемент $y_{4+\delta}(x) \notin \mathrm{A}$.

$$y_{4-\delta}(x) = \begin{cases} -x-22+6\delta, & x \le -3+\delta \\ x-16+8\delta-\delta^2, & x > -3+\delta \end{cases};$$

$$\lim_{x\to -3+\delta-0} y_{4-\delta}(x) = -19+5\delta, \quad \lim_{x\to -3+\delta+0} y_{4-\delta}(x) = -19+9\delta-\delta^2 \ne -19+5\delta$$

І в цьому випадку маємо розрив першого роду в точці $x=-3+\delta$, тому і елемент $y_{4-\delta}(x) \notin \mathrm{A}$. Таким чином, $y_4(x)$ – це ізольований елемент множини А.

3) **t** = 6:

$$y_6(x) = \begin{cases} -x-34, & x \le -5 \\ x-36, & x > -5 \end{cases}.$$

Розрив на лівому кінці сегмента $[-5;0]$, тому $y_6(x) \notin \mathrm{A}$, але при всіх $t > 6$ функції $y_t(x)$ мають розрив в точках лівіше сегмента $[-5;0]$ і являють собою елементи множини А. Функція $y_6(x) \notin \mathrm{A}$, але є граничним елементом цієї множини: в будь-якому околі цього елемента є елементи множини А.

2.3 Відкриті та замкнені множини

Множина називається відкритою, якщо всі її елементи є внутрішніми точками.

Наприклад, $[-1;3)$ – не відкрита множина, так як -1 – гранична точка, а множина $x^2 + y^2 < 4$ (на площині) – відкрита.

Замкнена множина – це множина, що містить всі свої граничні точки, наприклад, $x^2 + y^2 \le 4$.

Обмежена множина – це множина, яку можна розмістити в шарі якогось більшого радіусу. Наприклад, множина $x > 1$ - необмежена.

2.4 Збіжність в метричному просторі

Нехай E – метричний простір. Розглянемо послідовність його елементів $\{x_n\}=x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$. Елемент $x_0 \in E$ називається границею послідовності, якщо $\rho(x_n, x_0) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Основною властивістю збіжної послідовності є обмеженість. Заозначенням границі, починаючи з деякого номера n всі елементи послідовності будуть розташовані всередині шару з центром x_0 і радіусом ε. Для перших n елементів можливо знайти найбільшу метрику $R = \max \rho(x_i, x_0)$, $i = 1..n$, тоді всі елементи послідовності опиняться всередині шару радіуса $R + \varepsilon$ з центром x_0. Що й означає обмеженість послідовності.

2.5 Фундаментальна послідовність

Послідовність $x_1, x_2, \ldots..$ називається фундаментальною, якщо виконується умова:

$$\rho(x_m, x_n) \underset{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}}{\to} 0. \tag{2.1}$$

Метричний простір називається повним, якщо будь-яка фундаментальна послідовність у цьому просторі є збіжної і граничний елемент належить цьому простору.

Розглянемо послідовність $y = x^n$, $x \in [0;1]$. Кожна з функцій $y = x^n \in C_{[0;1]}$, так як всі ці функції неперервні на всій числовій осі. Знайдемо граничну функцію. При $0 \le x < 1$, $x^n \to 0$, отже, гранична функція задається формулою $y=\begin{cases}0, & x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$, яка показує, що ця функція має розрив на кінці сегмента $[0;1]$ и тому простору $C_{[0;1]}$ не належить. Чи доводить цей приклад, що простір $C_{[a;b]}$ не є повним? Ні, не доводить, тому що послідовність $y_n=x^n$ не є фундаментальною. Візьмемо, наприклад, число 0.8. При будь-якому n виконується нерівність $0<\sqrt[n]{0.8}<1$. Нехай $m,n\to\infty$, при цьому $m=2n$. Тоді при $x=\sqrt[n]{0.8}$ отримаємо $x^n-x^m=0.8-0.8^2=0.16$. Отже, при будь-якому n виявляється, що $\rho\left(x^n,x^{2n}\right)>=0.16$. А у фундаментальній послідовності елементів метрика прямує до нуля при будь-якому способі збільшення індексів n і m. Навпаки, простір $C_{[a;b]}$ є повним. Це доводить теорема Арцела: послідовність неперервних, рівномірно збіжних на $[a;b]$ функцій, має границею неперервну функцію. Рівномірна збіжність і є збіжність по нормі простору $C_{[a;b]}$.

2.6 Відображення метричних просторів

Відображення - закон, за яким кожному елементу з одного метричного простору ставиться у відповідність елемент іншого (або того ж самого) метричного простору. З елементарної математики відомі деякі відображення: дзеркальне відображення, поворот площини та інші.

Приклади відображень:

1. $y=1+2x$, $[2;4]\to[5;9]$. Для цього відображення виконується принцип відкритості: відкрита множина відображається у відкриту множину.

2. При відображеннях в метричних просторах в загальному випадку не виконується принцип відкритості, наприклад,, $y=x^2$: $(-1;1)\to[0;1)$.

3. Більш загальний приклад відображення:

$$\int_a^b \mathrm{K}(x,t)y(t)dt\to u(x)$$

У просторі $C_{[a,b]}$ з елементами $y=y(x)$. $K(x,t)$ – ядро інтегрального відображення (інтегрального оператора). Якщо ця функція неперервна в квадраті $[a;b]\times[a;b]$, то і отримана в результаті відображення функція $u(x)$ буде неперервна.

Приклад 2.5. Знайти відображення функції:

$$y=\frac{1}{1+x^2}$$

в просторі $C_{[0;1]}$ з ядром $K(x,t) = x + t$.

Розв'язання

$$\int_0^1 (x+t)\cdot\frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^1\left(\frac{x}{1+t^2}\right)dt + \int_0^1\frac{t}{1+t^2} = x\cdot arctg(t)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|\Big|_0^1 =$$

$$= x\cdot arctg(1) + \frac{1}{2}\ln 2 - x\cdot arctg0 - \frac{1}{2}\ln 1 = x\cdot\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2},$$

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad\to\quad u = \frac{\pi}{4}x + \ln\sqrt{2}.$$

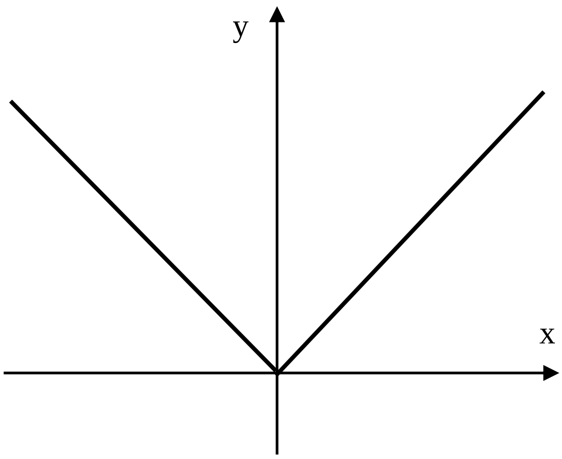
Відображення задають оператором, який позначають великими літерами:

$$y = \mathrm{A}x \ \left(x\in \mathrm{X} \Rightarrow y \in \mathrm{Y}\right).$$

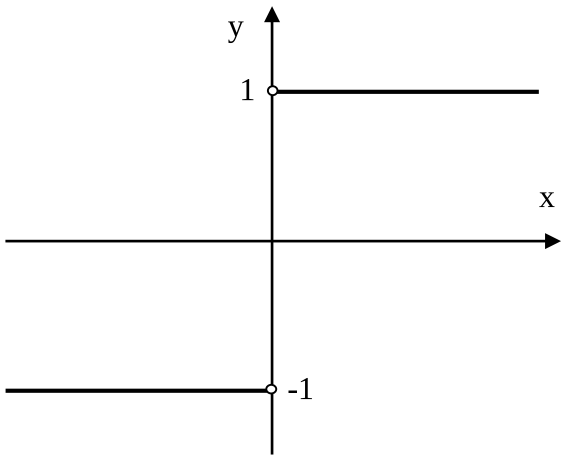
Оператор називається неперервним, якщо для будь-якої збіжної послідовності $x_1, x_2, ... \to x_*$ виконується $\mathrm{A}x_n \to \mathrm{A}x_*$.

У розглянутих прикладах оператори відображення є неперервними.

Розглянемо оператор $y = y'(x)$ на відрізку $[-1;1]$. Він не є неперервним, так як для неперервної функції $y = |x|$ (мал. 2.6), похідна не є неперервною (мал. 2.7).



Малюнок2.6



Малюнок2.7

Таким чином для послідовності $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5} ... \to 0$, є послідовність $1, -1, \ 1, -1...$, що має границі.

2.7 Стискаючий оператор

Оператор А називається стискаючим, якщо виконується умова:

(2.2)

$$\rho(Ax_1, Ax_2) < \rho(x_1, x_2) \qquad \forall\ x_1,\ \ x_2 \in E\,.$$

Теорема (принцип стискаючих відображень). Нехай в метричному просторі заданий оператор відображення з наступними властивостями:

1. Простір відображається сам у себе ($E \to E$), тобто результат відображення належить тому ж простору.

2. Виконується умова:

$$\rho(Ax_1, Ax_2) < \delta\rho(x_1, x_2), \quad 0 \le \delta < 1, \quad \forall\ x_1, x_2 \in E \tag{2.3}$$

Тоді будь-яка послідовність елементів $x_n = Ax_{n-1}$, що починається з довільного елемента $x_0 \in E$, має границю. Ця границя єдина і не залежить від вибору x_0.

Доведення властивості повноти метричного простору.

Доведемо, що послідовність фундаментальна:

$$\rho(x_m, x_n) = \rho(Ax_{m-1}, Ax_{n-1}) < \delta\rho(x_{m-1}, x_{n-1}) = \delta\rho(Ax_{m-2}, Ax_{n-2}) < \delta^2\rho(x_{m-2}, x_{n-2})\ldots <$$
$$< \delta^n\rho(x_{m-n}, x_0). \tag{2.4}$$

Нехай $m > n$. Розглянемо:

$$\begin{gathered}\rho(x_{m-n}, x_0) \le \rho(x_{0,} x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n}) < \\ < \rho(x_0, x_1) + \delta\rho(x_0, x_1) + \delta^2\rho(x_0, x_1) + \ldots + \delta^{m-n-1}\rho(x_0, x_1) = \\ = (1 + \delta + \delta^2 + \ldots + \delta^{m-n-1})\rho(x_0, x_1)\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$S = 1 + \delta + \delta^2 + \ldots + \delta^{m-n-1} \qquad |\times\delta$$

$$\delta S = \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots + \delta^{m-1},$$

$$S(1-\delta) = 1 + \delta^{m-n},$$

$$S = \frac{1-\delta^{m-n}}{1-\delta}\ . \tag{2.6}$$

З формул (2.4) – (2.6) отримаємо:

$$\rho(x_m, x_n) < \delta^n \cdot S\rho(x_0, x_1);$$

$$\rho(x_m, x_n) < \frac{\delta^n - \delta^m}{1-\delta}\rho(x_0, x_1). \tag{2.7}$$

При $m \to \infty,\ n \to \infty$, $\rho(x_m, x_n) \to 0$, отже послідовність фундаментальна.

Доведемо єдиність граничного елемента. Нехай граничних елементів два: u і v. Так як вони граничні, то $Au = u$ і $Av = v$, а враховуючи, що оператор стискаючий, маємо $\rho(Au, Av) < \delta\rho(u, v)$. Замінюючи Au на u, а Av

на v, приходимо до нерівності $\rho(u,v) < \delta\rho(u,v)$, яка справедлива тільки при $\rho(u,v) = 0$. З аксіоми метрики це можливо тільки для тотожних елементів.

Розглянемо застосування принципу стискаючих відображень.

Нехай потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Припустимо, що рівняння перетворили до вигляду $x = \varphi(x)$. Якщо виявилося, що $\varphi(x)$ переводить сегмент $[a,b] \to [a;b]$ і $|\varphi'(x)| < \delta$ на $[a,b]$, де $0 \le \delta \le 1$, то відображення сегмента $[a,b]$ самого в себе буде стискаючим і для будь-якого $x_0 \in [a,b]$, можна побудувати послідовність $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)\ldots$, яка буде мати границю. Граничне значення x буде розв'язком рівняння $x = \varphi(x)$, а отже, і розв'язком вихідного рівняння.

Приклад 2.6. Розв'язати рівняння:

$$x^3 - 5x + 3 = 0.$$

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння:

$$5x = x^3 + 3 \to x = \frac{x^3+3}{5};$$

$$\varphi(x) = \frac{x^3+3}{5}.$$

Знайдемо образ сегмента $[0;1]$: $x^3 \in [0;1]$, тому

$$\frac{x^3+3}{5} \in [0;1].$$

Перевіримо, чи є відображення стиском:

$$\varphi'(x) = \frac{3x^2}{5}, \quad |\varphi'(x)| < \frac{3}{5}$$

Умова стиску виконана, отже, на сегменті задане рівняння має єдиний корінь. Виконаємо розрахунок декількох кроків наближення до розв'язку від початкового значення нуль. Результати зведемо в таблицю (табл. 2.2)

Таблиця 2.2

x	x^3	$\varphi(x)$
0	0	0,6
0,6	0,216	0,6432
0,6432	0,2661	0,6532
0,6532	0,2787	0,6557
0,6557	0,2819	0,6564
0,6564	0,2828	0,6566

У першому і останньому стовпчиках таблиці числа вже повільно зростають, це сигналізує про близькість цих чисел до розв’язку рівняння. Щоб отримати оцінку похибки розв’язку, можна взяти нове початкове наближення, так щоб наближення до розв’язу йшло зверху (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

x	x^3	$\varphi(x)$
0,66	0,2875	0,6575
0,6575	0,2842	0,6568
0,6568	0,2833	0,6567

Порівнюючи останні рядки таблиць 2.2 і 2.3, робимо висновок, що розв’язок заданого рівняння задовольняє нерівності:

$$0{,}6566 < x < 0{,}6567\ .$$

Приклад 2.7. Розв’язати рівняння $x^3 + 3x - 7 = 0$.

Розв’язання. Перетворити задачу до вигляду, який допускає використання принципу стискаючих відображень далеко не просто, та й не завжди можливо. Спробуймо діяти за аналогією до попереднього прикладу:

$$3x = 7 - x^3 \quad \to \quad x = \frac{7 - x^3}{3}, \qquad \varphi(x) = \frac{7 - x^3}{3}\ .$$

Помітимо, що $\varphi'(x) = -x^2$, $|\phi'(x)| < 1$, тільки при $x \in (-1;1)$, але цей інтервал відображається в інтервал $\left(2;\frac{8}{3}\right)$. Принцип перетворення простору в себе порушений, метод стискаючих відображень не застосовуємо. Перетворимо рівняння іншим способом.

$$(x^2 + 3)x = 7 \quad \to \quad x = \frac{7}{x^2 + 3}$$

Розглянемо сегмент $[1;2]$.

$$x^2 + 3 \in [5.44\,;7] \quad \to \quad \frac{7}{x^2 + 3} \in [1\ ;\ 1{,}289]$$

Відображення сегмента в себе виконано.

$$\varphi'(x) = -\frac{14x}{(x^2 + 3)^2}, \qquad |\varphi'(x)| = \frac{14x}{(x^2 + 3)^2}\ .$$

$$(x^2 + 3)^2 \in [29.6\,;49], \quad 14x \in [14;28] \quad \to \quad |\varphi'(x)| < 1$$

Умову стиску оператора також задовільнено. Робимо висновок: на сегменті $[1;2]$ задане рівняння має єдиний розв'язок. На цьому сегменті похідна функції $\phi(x)$ від'ємна . В цьому випадку послідовні наближення будуть обгортати розв'язок, тобто розташовуватимуться по черзі вище і нижче розв'язку. Такий характер дозволяє на кожному кроці контролювати похибку результату (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

x	x^2	$\varphi(x)$
1	1	7/4
1,75	3,0625	1,1546
1,1546	1,3331	1,6155
1,615	2,6098	1,2478

Тоді

$$1{,}2478 < x_* < 1{,}6155 .$$

На кожному кроці інтервал, що охоплює розв'язок рівняння, буде неодмінно звужуватися, що означає підвищення точності результату.

3 ЛІНІЙНИЙ ПРОСТІР

3.1 Означення та приклади

Простір називається лінійним, якщо в ньому визначені операції додавання і множення на число:

$$x, y \in L \to x + y \in L, \;\; kx \in L .$$

З цього оззначення випливає, що в лінійних просторах завжди існує нульовий елемент. Додавання будь-якого елементу з нульовим не змінює даний елемент.

Приклади лінійних просторів:

1. R – числова пряма.

2. R^n - Простір векторів з n координатами зі звичайними операціями додавання векторів і множення на число.

3. $C_{[a;b]}$ – простір неперервних на відрізку [a;b] функцій із звичайними операціями над функціями є лінійним простором.

4. Простір всіх квадратних матриць заданої розмірності.

Завдання для самостійної роботи:

1. Довести, що множина поліномів 2-го степеня не є лінійним простором.

2. Довести, що множина поліномів не більше ніж 2-го степеня є лінійним простором.

3. Довести, що множина збіжних числових рядів є лінійним простором.

4. Довести, що множина розбіжних числових рядів не є лінійним простором.

3.2 Нормовані простори

Норма – одномісна операція, яка позначається $\|x\|$. Норма може бути введена тільки в лінійних просторах.

Аксіоми норми:

1. Норма невід'ємна $\|x\| \geq 0$, причому тільки нульовий елемент має норму, яка дорівнює нулю.

2. $\|kx\| = |k| \cdot \|x\|$, де k – будь-яке число.

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ – нерівність трикутника для норм.

Простір неперервних функцій є лінійним, так як сума неперервних функцій неперервна і добуток функції на число не порушує її неперервність. В просторі $C_{[a;b]}$ норму визначають формулою:

$$\|y\| = \max_{[a;b]} |f(x)| \tag{3.1}$$

Приклад 3.1. Знайти норму $y = 3 - 2x$ в просторі $C_{[-1;4]}$.

Розв'язання. Функція лінійна, екстремальні значення приймає на кінцях інтервалу:

$$y(-4) = 5, \quad y(4) = -5, \quad \|y\| = 5.$$

Приклад 3.2. Знайти норму $y = 4 - |x|$ в просторі $C_{[-1;3]}$.

Розв'язання. На частинах заданого сегмента $[-1;0]$ і $[0;3]$ задана функція лінійна, тому достатньо досліджувати її значення на кінцях цих інтервалів

$$y(-1) = 3, \; y(-1) = 3, \; y(0) = 4, \quad \to \quad \|y\| = 4.$$

Приклад 3.3. Знайти норму $y = x|x-3| - x$ у просторі $C_{[0;4]}$.

Розв'язання. Перетворимо запис формули заданої функції:

$$y = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x < 3, \\ x^2 - 4x, & x \ge 3, \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} -2x + 2, & x < 3, \quad y'(1) = 0 \\ 2x - 4, & x \ge 3, \quad y' \ne 0, \end{cases}$$

$$y(0) = 0 - 0 = 0,$$
$$y(1) = -1,$$
$$y(3) = 9 - 12 = -3,$$
$$y(4) = 16 - 16 = 0.$$

Отже, $\|y\| = 3$.

Приклад 3.4. Знайти норму функції:

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5$$

у просторі $C_{[-1;2]}$.

Розв'язання. Обчислимо найбільше і найменше значення гладкої функції на сегменті [-1;2].

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 0 \quad \to \quad x_1 = -2 \notin [-1;2], \quad x_2 = 1 \in [-1;2],$$
$$y(-1) = 8, \; y(1) = -12, \; y(2) = -1 \to \|y\| = 12.$$

4 ЕВКЛІДОВИЙ ПРОСТІР

4.1 Скалярний добуток

Нехай $u, v \in L$. Тоді двомісна операція (u, v) є скалярним добутком, якщо

1. (u, v) – число.
2. $(u, v) = (v, u)$.
3. $(u, u) \geq 0$. (4.1)
4. $(u, v + w) = (u, v) + (v, w)$.
5. $(ku, v) = k(u, v)$.

Це означення узагальнює поняття скалярного добутку добре відомого для векторів. Умови 1-5 називають аксіомами скалярного добутку. З характеру аксіом видно, що скалярний добуток можна ввести тільки в лінійному просторі.

Означення. Лінійний простір, в якому визначено скалярний добуток, називають *евклідовим простором*.

4.2 Норма, породжена скалярним добутком

Якщо в деякому просторі визначено скалярний добуток, то можна в цьому просторі ввести і норму за формулою:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \tag{4.2}$$

Доведемо, що аксіоми норми при цьому будуть виконані. Перші дві аксіоми очевидні. Доведемо нерівність трикутника для норми, породженої скалярним добутком. Нехай x і y - будь-які елементи лінійного простору, потрібно довести

$$\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)} \geq \sqrt{(x + y, x + y)}.$$

Обидві частини нерівності невід'ємні, можна піднести до квадрату:

$$(x, x) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y) \geq (x, x) + 2(x, y) + (y, y);$$

$$\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} \geq (x, y) \quad \rightarrow \quad \|x\| \cdot \|y\| \geq (x, y). \tag{4.3}$$

Для доведення нерівності(4.3) помітимо, що $(tx-y,tx-y)\geq 0$ при довільному t, отже:

$$t^2(x,x)-2t(x,y)+(y,y)\geq 0 \;\to\; D=4(x,y)^2-4(x,x)(y,y)\leq 0\,;$$

$$(x,y)^2\leq (x,x)(y,y) \quad\to\quad (x,y)^2\leq \|x\|^2\cdot\|y\|^2 \quad\to\quad \|x\|\cdot\|y\|\geq (x,y).$$

Нерівність трикутника доведено.

4.3 Лінійна залежність елементів

Елементи лінійного простору $u_1,u_2,....u_n\in L$ називаються лінійно залежними, якщо існують числа $k_1,k_2,...,k_n$ з яких не всі дорівнюють нулю (${k_1}^2+{k_2}^2+...+{k_n}^2\neq 0$), такі що $k_1u_1+k_2u_2+...+k_nu_n=0$. Якщо таких чисел не існує, то елементи – лінійно незалежні.

Приклад 4.1. Довести, що елементи $u_1=(-3;2)$, $u_2=(9;-6)$ лінійно залежні.

Розв’язання. Можна покласти $k_1=3$, $k_2=1$, тоді:

$$k_1u_1+k_2u_2=3\cdot(-3;\,2)+1\cdot(9;\,-6)=(-9;\,6)+(9;\,-6)=0\,.$$

Отже, u_1,u_2 – лінійно залежні.

Максимальна кількість лінійно незалежних елементів називається розмірністю лінійного простору.

Приклад 4.2. Встановити лінійну залежність або незалежність елементів $\bar{a}=\{1;\,1\}$, $\bar{b}=\{2;\,0\}$.

Розв’язання:

$$k_1\{1;1\}+k_2\{2;0\}=0\,;$$
$$\{k_1,k_1\}+\{2k_2;0\}=0\,;$$
$$\begin{cases}k_1+2k_2=0\\ k_1+0=0,\end{cases}$$

Ця система має тільки тривіальне рішення, отже, елементи лінійно незалежні.

4.4 Базис лінійного простору

Нехай в лінійному просторі L існує n лінійно незалежних елементів, а будь-які n + 1 елементів цього простору лінійно залежні. Тоді простір називають n-мірним, а систему з n лінійно незалежних елементів називають базисом цього простору.

Всі елементи з цього простору можна представити у вигляді:

$$\bar{a} = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_n u_n . \tag{4.4}$$

Таке уявлення називається розклад за базисом.

Розглянемо векторний простір. Базис можна скласти з n лінійно незалежних векторів:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}), \\ \bar{a}_2 &= (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{a}_n &= (\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots, \alpha_{nn}), \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots\ldots & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} .$$

З лінійної алгебри відомо, що якщо $\Delta \neq 0$, то вектори лінійно незалежні.

У лінійному просторі L довільної природи зі скалярним добутком заздалегідь не відома розмірність простору, лінійна залежність елементів $u_1, u_2, \ldots u_n \in L$ в цьому випадку встановлюється за допомогою визначника Грама.

$$\begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_{1,}, u_2) & (u_1, u_3) & \ldots & (u_1, u_n) \\ (u_2, u_1) & (u_2, u_2) & (u_2, u_3) & \ldots & (u_2 u_n) \\ \ldots\ldots\ldots & & & & \\ (u_n, u_1) & (u_n, u_2) & (u_n, u_3) & \ldots & (u_n, u_n) \end{vmatrix} . \tag{4.5}$$

Якщо визначник дорівнює нулю, то елементи - лінійно залежні.

В лінійних функціональних просторах з достатньо гладкими функціями можна визначити лінійну залежність або незалежність за допомогою визначника Вронського.

$$w(x)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1' & u_2' & \dots & u_n' \\ \dots\dots\dots & & & \\ u_1^{n-1} & u_2^{n-1} & \dots & u_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Функції будуть лінійно залежні, якщо $w(x)\equiv 0$ на $[a;b]$.

Приклад 4.3. З'ясувати, чи є лінійно залежними функції:

$$y_1=\sin^2 x,\quad y_2=\cos 2x,\quad y_3=7.$$

Розв'язання. Складемо визначник Вронського:

$$w=\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos 2x & 7 \\ \sin 2x & -2\sin 2x & 0 \\ 2\cos 2x & -4\cos 2x & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\ 7\left(\sin 2x\cdot\left(-4\cos 2x\right)-2\cos 2x\cdot\left(-2\sin 2x\right)\right)\equiv 0.$$

Функції лінійно залежні, наприклад:

$$2\sin^2 x+\cos 2x-\frac{1}{7}\cdot 7=2\sin^2 x+(\cos^2 x-\sin^2 x)-(\cos^2 x+\sin^2 x)\equiv 0.$$

4.5 Простір Банаха

Простір Банаха - це повний лінійний нормований простір. Наприклад, простір $C_{[a,b]}$. Як вже було вказано вище, повнота цього простору є наслідком теореми Арцела. Як правило, до простору Банаха відносять простори нескінченновимірні. Таким є і простір $C_{[a,b]}$. Доведемо, що в сегменті $[a;b]$ можна знайти будь-яку кількість лінійно незалежних неперервних функцій, що і вказує на нескінченну розмірність простору $C_{[a,b]}$.

Розглянемо *n + 1* функцію $y=1, y=x,\ y=x^2,\dots y=x^n$. Запишемо для них визначник Вронського:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \\ 0 & 1 & 2x & \ldots & nx^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & n(n-1)x^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n! \end{vmatrix} = 0!\cdot 1!\cdot 2!\ldots\cdot n! \neq 0$$

Отже, система функцій незалежна при будь-якому n, тому в даному просторі не існує базису зі скінченного числа елементів.

4.6 Розклад за базисом

Приклад 4.4. У векторному просторі елементи $\overline{u_1} = \{-2;1;3\}$, $\overline{u_2} = \{4;-3;5\}$, $\overline{u_3} = \{3;2;-1\}$ задають базис. Розкласти елемент $\overline{a} = \{-2;-3;5\}$ за цим базисом.

Розв’язання. Необхідно представити елемент $\overline{a} = \{-2;-3;5\}$ у вигляді $\overline{a} = k_1\overline{u_1} + k_2\overline{u_2} + k_3\overline{u_3}$. Помножимо скалярно заданий вектор послідовно на вектори базису і складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} k_1(\overline{u_1},\overline{u_1}) + k_2(\overline{u_2},\overline{u_1}) + k_3(\overline{u_3},\overline{u_1}) = (\overline{a},\overline{u_1}) \\ k_1(\overline{u_1},\overline{u_2}) + k_2(\overline{u_2},\overline{u_2}) + k_3(\overline{u_3},\overline{u_2}) = (\overline{a},\overline{u_2}) \\ k_1(\overline{u_1},\overline{u_3}) + k_2(\overline{u_2},\overline{u_3}) + k_3(\overline{u_3},\overline{u_3}) = (\overline{a},\overline{u_3}) \end{cases} \tag{4.6}$$

Головний визначник цієї системи:

$$\begin{vmatrix} (u_1\ u_1) & (u_2\ u_1) & (u_1\ u_3) \\ (u_1\ u_2) & (u_2\ u_2) & (u_2\ u_3) \\ (u_1\ u_3) & (u_2\ u_3) & (u_3\ u_3) \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

є визначником Грама, для набору базисних векторів він не дорівнює нулю. Згідно з теоремою Крамера, ця система має єдиний розв’язок. Знайдемо розклад за базисом у даному прикладі.

$$(u_1,u_1) = 4+1+9 = 14;$$

$$(u_2,u_1) = -8-3+15 = 4;$$

$$(u_2,u_2) = 16+9+25 = 50;$$

$$(u_3,u_1) = -6+2-3 = -7;$$

$$(u_2, u_3) 12 - 6 - 5 = 1;$$

$$(u_3, u_3) = 9 + 4 + 1 = 14.$$

Отже, система матиме вигляд:

$$\begin{cases} 14k_1 + 4k_2 - 7k_3 = 16 \\ 4k_1 + 50k_2 + k_3 = 26 \\ -7k_1 + k_2 + 14k_3 = -17 \end{cases}.$$

Якщо система має таку властивість, що на головній діагоналі розташовані числа, по модулю значно більші, ніж інші числа відповідного рядку, то систему можна розв’язувати користуючись методом стискаючих відображень.

Перетворимо систему:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{16}{14} - \frac{4}{14} k_2 + \frac{7}{14} k_3 \\ k_2 = \frac{26}{50} - \frac{4}{50} k_1 - \frac{1}{15} k_3 \\ k_1 = -\frac{17}{14} + \frac{7}{14} k_1 - \frac{1}{14} k_2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} k_1 = 1{,}14 - 0{,}29k_2 + 0{,}5k_3 \\ k_2 = 0{,}52 - 0{,}08k_1 - 0{,}02k_3 \\ k_1 = -1{,}214 + 0{,}5k_1 - 0{,}071k_2 \end{cases}.$$

Результати розрахунків зведемо в таблицю 4.1.

Таблиця 4.1

k_1	k_2	k_3
0	0	0
1,14	0,428	– 0,674
0,6807	0,479	– 0,9078
0,5493	0,4943	– 0,975
	….	
0,5	0,5	– 1

Отримуємо розклад:

$$\bar{a} = 0{,}5\overline{u_1} + 0{,}5\overline{u_2} - \overline{u_3}.$$

Виконаємо перевірку:

$$\frac{1}{2}(-2;1;3)+\frac{1}{2}(4;-3;5)-(3;2;-1)=\{-2;-3;5\}.$$

Приклад 4.5. Розкласти за базисом $\overline{u_1}\{-2;1;3\}$, $\overline{u_2}\{1;-1;1\}$, $\overline{u_3}\{4;5;1\}$ вектор $\overline{a}=\{-3;10;4\}$.

Розв'язання:

$$(u_1,u_1)=4+1+9=14;$$
$$(u_1,u_2)=-2-1+3=0;$$
$$(u_1,u_2)=-2-1+3=0;$$
$$(u_2,u_2)=1+1+1=3;$$
$$(u_2,u_3)=4-5+1=0;$$
$$(u_3,u_3)=16+25+1=42.$$

Система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases}14k_1=28\\3k_2=9\\42k_3=42\end{cases}\qquad\begin{cases}k_1=2\\k_2=3\\k_3=1\end{cases}$$

Отже $\overline{a}=2\overline{u_1}+3\overline{u_2}+\overline{u_3}$.

Як і у векторній алгебрі, елементи називають ортогональними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю. Базис називається ортогональним, якщо $(u_k,u_m)=0$, $k\neq m$. Легко помітити, на прикладі 4.5, що найпростіше обчислювати розклад елементів за ортогональним базисом.

Будь-яку систему лінійно незалежних елементів можна перетворити в ортогональну. Цей метод називається методом ортогоналізації Грама-Шмідта.

Нехай u_1,u_2,u_3 ... - лінійно незалежні елементи. Будемо будувати на їх підставі базис з елементів v_1,v_2,v_3 ..., що мають властивість:

$$(v_k,v_m)=0,\ k\neq m.$$

Елементи ортогональної системи обчислюємо послідовно.

$$v_1 = u_1, \quad v_2 = u_2 + k_1 v_1;$$
$$(v_1, v_2) = 0: \quad (v_1, u_2 + k_1 v_1) = (v_1, u_2) + k_1 (v_1, v_1) = 0;$$
$$k_1 = -\frac{(v_1, u_2)}{(v_1, v_1)};$$
$$v_3 = u_3 + n_1 v_1 + n_2 v_2;$$
$$(v_3, v_1) = 0: \quad (v_3; v_1) = (u_3 + n_1 v_1 + n_2 v_2, v_1) = (u_3, v_1) + n_1 (v_1, v_1) + n_2 (v_2, v_1) = 0.$$

Враховуючи що $(v_1, v_2) = 0$, отримаємо:

$$n_1 = -\frac{(u_3; v_1)}{(v_1; v_1)}. \tag{4.8}$$

Аналогічно знаходимо коефіцієнт n_2:

$$(v_3, v_2) = 0: \quad (v_3; v_2) = (u_3 + n_1 v_1 + n_2 v_2, v_2) = (u_3, v_2) + n_1 (v_1, v_2) + n_2 (v_2, v_2) = 0$$
$$(v_1, v_2) = 0 \quad \rightarrow \quad (u_3, v_2) + n_2 (v_2, v_2) = 0;$$
$$n_2 = -\frac{(u_3; v_2)}{(v_2; v_2)}. \tag{4.8}$$

Потім $v_4 = u_4 + n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3$ і т. д.

Означення. Елемент називається нормованим, якщо його норма дорівнює одиниці. Базис називають ортонормованим, якщо його елементи попарно ортогональні і нормовані.

Означення. Лінійною оболонкою елементів u_1, u_2, u_3 ... називається множина всіх можливих лінійних комбінацій цих елементів.

Завдання для самостійної роботи. Довести, що лінійна оболонка є лінійним простором, причому якщо ці n елементів лінійно незалежні, то простір буде мати розмірність n.

Приклад 4.6. Відомі скалярні добутки елементів u_1 і u_2 гільбертового простору.

$$(u_1, u_1) = 6, \quad (u_1, u_2) = 4, \quad (u_2, u_2) = 5.$$

Знайти ортонормованій базис лінійної оболонки u_1, u_2.

Розв’язання. Елементи ортогонального базису позначимо v_1 і v_2. Припустимо $v_1 = u_1$, $v_2 = ku_1 + u_2$.

Так як $(v_1, v_2) = 0$, то $(u_1, ku_1 + u_2) = 0$.

Знайдемо:

$$k(u_1, u_1) + (u_1, u_2) = 0, \quad 6k + 4 = 0, \quad k = -\frac{2}{3};$$

$$v_2 = -\frac{2}{3}u_1 + u_2.$$

Ортонормований базис (w_1, w_2) отримаємо, нормуючі елементи базису (v_1, v_2).

$$\|v_1\| = \|u_1\| = \sqrt{(u_1, u_1)} = \sqrt{6}, \; w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{u_1}{\sqrt{6}};$$

$$\|v_2\| = \sqrt{(v_2, v_2)} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}u_1 + u_2, -\frac{2}{3}u_1 + u_2\right)} =$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}(u_1, u_1) - 2\cdot\frac{2}{3}(u_1, u_2) + (u_2, u_2)} == \sqrt{\frac{4}{9}\cdot 6 - 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 4 + 5} = \sqrt{\frac{7}{3}};$$

$$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{-\frac{2}{3}u_1 + u_2}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{-2}{\sqrt{3\cdot 7}}u_1 + \sqrt{\frac{3}{7}}u_2.$$

В результаті отримано:

$$\|w_1\| = \frac{\sqrt{(u_{1,} u_{1,})}}{\sqrt{6}} = 1, \qquad \|w_2\| = \sqrt{\frac{4}{3\cdot 7}\cdot 6 - 2\cdot\frac{2}{7}\cdot 4 + \frac{3}{7}\cdot 5} = \sqrt{\frac{8 - 16 + 15}{7}} = 1;$$

$$(w_1, w_2) = -\frac{2\cdot(u_1, u_1)}{\sqrt{3\cdot 7\cdot 6}} + \sqrt{\frac{3}{7\cdot 6}}(u_1, u_2) = -\frac{12}{\sqrt{3\cdot 7\cdot 6}} + \sqrt{\frac{3}{7\cdot 6}}\cdot 4 =$$

$$= -\frac{12}{\sqrt{3\cdot 7\cdot 6}} + \frac{3\cdot 4}{\sqrt{3\cdot 7\cdot 6}} = 0.$$

Елементи w_1 и w_2 – нормовані і ортогональні.

5 ПРОСТІР $L_{2[a,b]}$

Через $L_{2[a,b]}$ позначається простір, що складається з функцій, для яких існує інтеграл:

$$\int_a^b f^2(x)dx.$$

Порівняємо $C_{[a,b]}$ і $L_{2[a,b]}$. Так як для неперервної функції інтеграл існує завжди, то L_2 ширший клас функцій, тому частіше застосовується в практичних розрахунках.

5.1 Скалярний добуток в просторі L_2

Скалярний добуток задається формулою:

$$(y_1, y_2) = \int_a^b y_1(x) \cdot y_2(x)dx \tag{5.1}$$

Приклад 5.1. Обчислити скалярний добуток функцій $y_1 = 3 - x$ і $y_2 = 6x$ в просторі $L_{2[-1;2]}$.

Розв'язання:

$$(y_1, y_2) = \int_{-1}^{2} \left(18x - 6x^2\right)dx = \left(9x^2 - 2x^3\right)\Big|_{-1}^{2} = (36 - 16) - (9 + 2) = 9$$

5.2 Норма в просторі L_2

Норма в L_2 задається формулою:

$$\|y(x)\| = \sqrt{\int_a^b y^2(x)dx} = \sqrt{(y_1 y_2)} \tag{5.2}$$

Приклад 5.2. Обчислити норму $y = (1 - 2x)^4$ в просторі $L_{2[0;1]}$.

Розв'язання:

$$(y,y)=\int_0^1 (1-2x)^8\,dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-2x)^9}{9}\Bigg|_0^1=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{9};$$

$$\|y\|=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 5.3. Знайти, при якому значенні k елементи $y_1=x^2$, $y_2=x+k$ ортогональні в просторі $L_{2[0;1]}$.

Розв'язання:

$$(y_1,y_2)=\int_0^1\left(x^3+kx^2\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{k}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{k}{3}=0, \quad k=-\frac{3}{4}.$$

Приклад 5.4. Знайти норму $y=\sin x$ в просторі $L_{2\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$.

Розв'язання:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 x\,dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}(0)\right)-\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}(0)\right)==\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{4};$$

$$\|y\|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Приклад 5.5. Знайти норму $y=e^{-x}$ в просторі $L_{2[-\ln 2;\ln 2]}$.

Розв'язання:

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2}e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\Bigg|_{-\ln 2}^{\ln 2}=-\frac{1}{2}\left(e^{-2\ln 2}-e^{2\ln 2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-4\right)=\frac{15}{8};$$

$$\|y\| = \sqrt{\frac{15}{8}}\,.$$

5.3 Метрика в просторі L_2

Метрика задається формулою:

$$\rho(u, v) = \|u - v\|. \tag{5.3}$$

Приклад 5.6. Обчислити метрику для елементів $y_1 = 3 + 2x$ і $y_2 = x - 1$ в просторі $L_{2[-2;0]}$.

Розв'язання:

$$\int_{-2}^{0} (4 + x)^2 dx = \left.\frac{(4 + x)^3}{3}\right|_{-2}^{0} = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}, \qquad \rho(y_1, y_2) = \sqrt{\frac{56}{3}}\,.$$

6 ПРОСТІР ГІЛЬБЕРТА

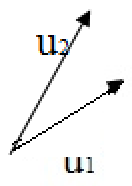
6.1 Підпростір лінійного простору

Розглянемо елементи лінійного простору $u_1, u_2 ... u_k \in E$. Як зазначалося вище, лінійною оболонкою цих елементів називається множина, утворена за допомогою все можливих лінійних комбінацій $C_1u_1 + C_2u_2 + ... + C_ku_k$.

Розглянемо найпростіші приклади:

1. Множина векторів, які розташовані на прямій – це лінійна оболонка для вектора u_1, паралельного цій прямій.

2. Лінійна оболонка двох неколінеарних векторів – це вся площина (мал. 6.1).



Малюнок 6.1

Лінійна оболонка елементів $u_1, u_2 ... u_k$ має всі властивості лінійного простору і при цьому є частиною простору Е, тому називається підпростором. Зокрема, якщо розмірність простору дорівнює k, а елементи $u_1, u_2 ... u_k$ лінійно незалежні, то лінійна оболонка збігається з усім простором.

6.2 Формальний розклад за ортогональною системою

Нехай є ортогональна система елементів лінійного простору u_i, $i = 1,2,3,...$, $u_i \perp u_j$, $i \neq j$.

Якщо відомо, що має місце рівність $f = k_1 u_1 + k_2 u_2 + ...$, то коефіцієнти k_i, можна знайти, помноживши скалярно обидві частини цієї рівності на u_i:

$$k_i = \frac{(f, u_i)}{(u_i, u_i)}, \ i = 1,2,3,... . \tag{6.1}$$

Нехай u_1, u_2 довільна ортогональна система. Розглянемо величину:

$$(f - k_1 u_1 - k_2 u_2, f - k_1 u_1 - k_2 u_2) \geq 0;$$

$$(f, f) - 2k_1 (f, u_1) - 2k_2 (f, u_2) + k_1^2 (u_1, u_1) + k_2^2 (u_2, u_2) \geq 0.$$

Замість k_1 і k_2 підставимо їх значення:

$$(f, f) - 2\frac{(f, u_1)}{(u_1, u_1)} \cdot (f, u_1) - 2\frac{(f, u_2)}{(u_2, u_2)} \cdot (f, u_2) + \frac{(f, u_1)^2}{(u_1, u_1)^2} \cdot (u_1, u_1) + \frac{(f, u_2)^2}{(u_2, u_2)^2} \cdot (u_2, u_2) \geq 0;$$

$$\frac{(f, u_1)}{(u_1, u_1)} \cdot (f, u_1) = \frac{(f, u_1)^2}{(u_1, u_1)^2} \cdot (u_1, u_1) = k_1^2 (u_1, u_1) = k_1 (f, u_1),$$

$$(f, f) - k_1^2 (u_1, u_1) - k_2^2 (u_2, u_2) \geq 0;$$

$$\|f\|^2 \geq k_1{}^2\|u_1\|^2 + k_2{}^2\|u_2\|^2 . \tag{6.2}$$

Ця нерівність виконується для кожної ортогональної системи з будь-якою кількістю елементів.

6.3 Функціональні простори

В функціональних просторах не існує базису зі скінченного числа елементів. В цих просторах розглядають ортогональні системи з нескінченним числом елементів. Доведена нерівність (6.2), справедлива і для ортогональних систем з нескінченним числом елементів, називається *нерівністю Бесселя:*

$$\|f\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} k_i{}^2\|u_i\|^2 . \tag{6.3}$$

Якщо в нерівності Бесселя ліва і права частини незначно відрізняються одна від одної, то це означає, що задану функцію можна з невеликою похибкою представити у вигляді розкладу по заданій ортогональній системі.

Нехай є ортогональна система елементів, яка володіє такою властивістю, що для будь-яких функцій з заданого простору нерівність Бесселя виконується як точна рівність:

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} k_i{}^2\|u_i\|^2 . \tag{6.4}$$

Тоді таку ортогональну систему називають повною системою або базисом простору. А рівність для повної системи елементів, називається *рівністю Парсеваля*.

Лінійний простір зі скалярним добутком, яке є повним відносно норми породженої скалярним добутком, називається *Гільбертовим простором*.

Розглянемо простір $L_{2[0,\pi]}$. В цьому просторі система функцій $u_k = \sin kx$, $k = 1,2,...$ є ортогональною на сегменті $[0;\pi]$.

$$\int_0^{\pi} \sin kx \cdot \sin mdx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(k-m)x - \cos(k+m)x\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-m}\sin(k-m)x - \frac{1}{2(k+m)}\sin(k+m)x\right)_0^{\pi} = 0, \qquad k \neq m$$

Згідно з теоремою Діріхле з курсу математичного аналізу, для множини кусково-неперервних функцій на сегменті така тригонометрична система є базисом.

Завдання для самостійної роботи. Доведіть, що множина кусково-неперервних функцій на сегменті $[0;\pi]$ є підпростором $L_{2[0,\pi]}$.

6.4 Елемент найкращого наближення

Нехай маємо простір P. Розглянемо елемент $u \in P$ і його лінійну оболонку $M \in P$. Для кожного елемента $m \in M$ визначена метрика $\rho(u,m)$:

$$\rho(u,m) = \|u - m\|.$$

Елементом найкращого приближення до елементу u називають той елемент із множини M, для котрого метрика мінімальна.

Нехай маємо два лінійно незалежних елемента $u_1, u_2 \in H$. Вони задають лінійну оболонку $L : k_1u_1 + k_2u_2$. Розглянемо довільний елемент $u \in H$.

Знайдемо елемент найкращого наближення до u із цієї лінійної оболонки (такі k_1 та k_2, при якому $\rho(u, k_1u_1 + k_2u_2) \to \min$). Норма задається формулою:

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}.$$

Якщо вираз, що знаходиться під знаком кореня, приймає найменше значення, то і корінь також буде мати мінімальне значення, тому мінімізуємо скалярний квадрат:

$$(u - k_1u_1 - k_2u_2, u - k_1u_1 - k_2u_2) = (u,u) - 2k_1(u_1,u) - 2k_2(u_2,u) + \\ + k_1{}^2(u_1,u_1) + k_2{}^2(u_2,u_2) + 2k_1k_2(u_1,u_2) = g(k_1,k_2). \qquad (6.5)$$

Мінімум досягається, якщо частинні похідні функції $g(k_1,k_2)$ дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial g}{\partial k_1} = \frac{\partial g}{\partial k_2} = 0;$$

$$\frac{\partial g}{\partial k_1} = -2(u,u_1) + 2k_1(u_1,u_1) + 2k_2(u_1,u_2) = 0\,;$$

$$\frac{\partial g}{\partial k_2} = -2(u,u_2) + 2k_2(u_1,u_1) + 2k_1(u_1,u_2) = 0\,;$$

$$\begin{cases} k_1(u_1,u_1) + k_2(u_1,u_2) = (u,u_1) \\ k_1(u_1,u_2) + k_2(u_2,u_2) = (u,u_2) \end{cases}. \tag{6.6}$$

Елементи u_1 и u_2 лінійно незалежні, отже, задана система завжди має розв'язок і при том єдиний, так як головний визначник системи є визначником Грама. Як зазначалося вище, для незалежної системи визначник Грама не дорівнює нулю. Позначимо елемент $g = k_1u_1 + k_2u_2$, який буде отриманий в результаті розв'язання системи (g – елемент найкращого приближення u до лінійної оболонки u_1, u_2). Задача суттєво спрощується, якщо u_1 та u_2 не тільки лінійно незалежні, а й ортогональні:

$$k_1 = \frac{(u,u_1)}{(u_1,u_1)}, \qquad k_2 = \frac{(u,u_2)}{(u_2,u_2)}. \tag{6.7}$$

Приклад 6.1. Знайти елемент найкращого наближення функції:

$$w = \begin{cases} 4, & x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ -2, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

у лінійній оболонці елементів $u_1 = \sin x$, $u_2 = \sin 2x$ за нормою простору $L_{[0,\pi]}$. Побудувати в одній системі координат графіки функції w і елементу найкращого наближення.

Розв'язання. Знайдемо коефіцієнти розкладу заданої функції:

$$(u_1,u_1) = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4}\sin 0\cdot 2\right) = \frac{1}{2}\pi\,;$$

$$(u_2,u_2) = \frac{\pi}{2}.$$

Обчислимо скалярний добуток функцій:

$$(w,u_1)=\int\limits_0^{\pi/2} 4\sin x dx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(-2)\sin x dx=-4\cos x\Big|_0^{\pi/2}+2\cos x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=$$

$$-4\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0\right)+2\left(\cos\pi-\cos\frac{\pi}{2}\right)=4-2=2;$$

$$k_1=\frac{2}{\pi/2}=\frac{4}{\pi};$$

$$(w,u_2)=\int\limits_0^{\pi/2} 4\sin 2x dx+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(-2)\sin 2x dx=-2\cos 2x\Big|_0^{\pi/2}+\cos 2x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=$$

$$-2(\cos\pi-\cos 0)+(\cos 2\pi-\cos\pi)=4+2;$$

$$k_2=\frac{6}{\pi/2}=\frac{12}{\pi}.$$

Запишемо елемент найкращого наближення:

$$g(x)=\frac{4}{\pi}\sin x+\frac{12}{\pi}\sin 2x.$$

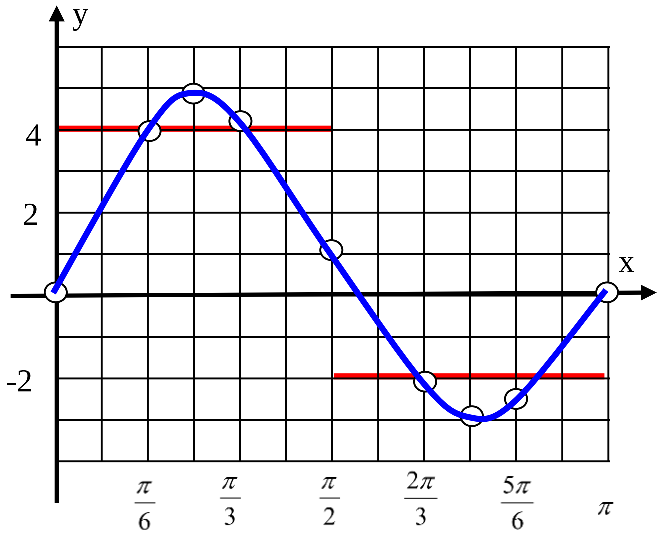
Для побудови графіка заповнимо таблицю (табл. 6.1)

Таблиця 6.1

x	$k_1 \sin x$	$k_2 \sin 2x$	$g(x)$
0	0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	0,637	3,308	3,945
$\frac{\pi}{4}$	0,9	3,82	4,72
$\frac{\pi}{3}$	1,103	3,308	4,411
$\frac{\pi}{2}$	1,273	0	1,223
$\frac{2\pi}{3}$	0,103	– 3,308	– 2,205
$\frac{3\pi}{4}$	0,9	– 3,82	– 2,919
$\frac{5\pi}{6}$	0,637	– 3,308	– 2,671
	0	0	0

2π			

Зобразимо графік (мал. 6.2).



Малюнок 6.2

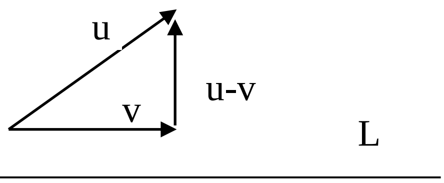
6.5 Ортогональне проектування

Система рівнянь (6.6) визначає елемент лінійної оболонки $L: k_1u_1 + k_2u_2$, для якого норма різниці $\|u - (k_1u_1 + k_2u_2)\|$ приймає найменше з усіх можливих значень. Розглянемо елемент:

$$h = u - (k_1u_1 + k_2u_2) \tag{6.8}$$

Перше рівняння системи (6.6) можна представити у вигляді $(h, u_1) = 0$, а друге – у вигляді $(h, u_2) = 0$. Отже, різниця між елементом та його найкращим наближенням завжди ортогональна до підпростору (лінійної оболонки), в якому шукується елемент найкращого наближення. Тому для пошуку елемента найкращого наближення достатньо ортогонально спроектувати даний елемент на підпростір.

Символом $Пр_L\, u$ позначається проекція елемента u на оболонку L. При цьому якщо $v = Пр_L\, u$, то $u - v \perp L$ (мал. 6.3).



Малюнок 6.3

Ортопроектор (оператор ортогонального проектування) – закон, за яким будь-якому елементу *u* з простору *H* ставиться у відповідність елемент, що належить *L*.

$$\forall u \in H\,,\quad v = \mathrm{A}(u) \in L\,,\quad u - v \perp L\ :\quad \mathrm{A}\ \text{– ортопроектор.}$$

Ядро оператора – множина елементів *u* з даного лінійного простору, для яких дія оператора дає нульовий елемент.

Оператор називається виродженим, якщо його ядром є множина розмірності більше, ніж нуль.

З означення випливають властивості ортопроектора:

1. $\mathrm{A}(\mathrm{A}(u)) = \mathrm{A}(u)$, звідси $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$.

2. $u \perp L \quad \rightarrow \quad \mathrm{A}(u) = 0$.

3. Ортопроектор – завжди вироджений оператор. Його ядро складають всі елементи простору, які ортогональні лінійній оболонці.

Оператор називають лінійним, якщо він володіє властивостями:

1. $\forall\, k \in R\,,\ \forall u \in H\ \ \mathrm{A}(ku) = k\mathrm{A}(u)$.

2. $\mathrm{A}(u_1 + u_2) = \mathrm{A}(u_1) + \mathrm{A}(u_2)$.

Оператор ортогонального проектування є лінійним.

У скінченновимірний просторах лінійний оператор завжди можна задати матрицею. Доведемо це. Нехай є *n*-мірний простір, із базисом $e_1, e_2, ..., e_n$.

$$\forall u \in \mathrm{E}_n : \qquad u = k_1 e_1 + k_2 e_2 + ... + k_n e_n = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ .... \\ k_n \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

A – лінійний оператор.

$$\mathrm{A}(u) = v\,,\quad \mathrm{A}(u) = \mathrm{A}(k_1 e_1 + k_2 e_2 + ...) = k_1 \mathrm{A}(e_1) + k_2 \mathrm{A}(e_2) + ... + k_n \mathrm{A}(e_n)$$

$$\mathrm{A}(\mathrm{e}_1) = \mathrm{a}_{11}\mathrm{e}_1 + \mathrm{a}_{12}\mathrm{e}_2 + ...$$

$$\mathrm{A}(\mathrm{e}_2) = \mathrm{a}_{21}\mathrm{e}_1 + \mathrm{a}_{22}\mathrm{e}_2 + ...$$

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ ... \\ m_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ ... \\ m_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_n \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - матриця оператора А.

Приклад 6.2. В просторі E_2 знайти ортопроектор на лінеал $\bar{u}=\{1;\,3\}$. *Лінеал* – це скорочення терміна *лінійна оболонка*.

Розв'язання. Так як простір скінченновимірний, то ортопроектор можна представити у вигляді матриці:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

Із властивості ортопроектора $\mathrm{A}u=u$, запишемо:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+3a_{12} \\ a_{21}+3a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}+3a_{12}=1 \\ a_{21}+3a_{22}=3. \end{cases} \tag{6.12}$$

Візьмемо вектор $v\perp u$, наприклад, $\bar{v}=\{-3;1\}$. За другою властивістю ортопроектора отримаємо $\mathrm{A}v=0$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3a_{11}+a_{12} \\ -3a_{21}+a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} -3a_{11}+a_{12}=0 \\ -3a_{21}+a_{22}=0. \end{cases} \tag{6.13}$$

Комбінуючи рівняння із систем (6.12) та (6.13), запишемо:

$$\begin{cases} a_{11}+3a_{12}=1 \\ -3a_{11}+a_{12}=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{21}+3a_{22}=3 \\ -3a_{21}+a_{22}=0. \end{cases} \tag{6.14}$$

Розв'язуючи ці системи, наприклад, за правилом Крамера, знаходимо матрицю ортопроектора:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{9}{100} \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

Перевіримо виконання властивостей ортопроектора:

$$A^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{3}{10} & \frac{9}{100}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{3}{10} & \frac{9}{100}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{100}+\frac{9}{100} & \frac{3}{100}+\frac{27}{100}\\ \frac{3}{100}+\frac{27}{100} & \frac{9}{100}+\frac{81}{100}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{3}{10} & \frac{9}{100}\end{pmatrix}=A\,.$$

Вироджена квадратна матриця – це матриця, визначник якої дорівнює нулю. Перевіримо, що в цьому прикладі ортопроектор є виродженим оператором та задається, відповідно, виродженою матрицею:

$$\det A=\det\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{3}{10} & \frac{9}{100}\end{pmatrix}=\frac{9}{100}-\frac{9}{100}=0\,.$$

Візьмемо довільний вектор: $\bar{a}=\{2;-3\}$. Знайдемо $\bar{b}=A\bar{a}$:

$$\bar{b}=\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{3}{10} & \frac{9}{10}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{10} & -\frac{9}{10}\\ \frac{6}{10} & -\frac{27}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{10}\\ -\frac{21}{10}\end{pmatrix}\ ||\ \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}.$$

Результат належить лінеалу - паралельний $\bar{u}$. Всі властивості ортопроекторів виконано.

Практичний сенс ортогонального проектування полягає в тому, що при розв’язанні складних практичних завдань відповідь намагаються представити у вигляді лінійної комбінації простих функцій або інших об'єктів. Як правило, точне розв’язок у вигляді такої комбінації представити не можна, отже, завдання розв’язується наближено. При цьому точний розв’язок є елементом $y\in H$, а наближений – у $A(u)\in L$. Похибка - норма різниці між проекцією та істинним значенням $\|A(u)-u\|$, так як проекція є елементом найкращого наближення (у даному випадку до точного розв’язку).

У розглянутій задачі $\bar{a}$ – аналог точного розв’язку, $\bar{b}$ – аналог наближеного розв’язку.

Оцінимо у відсотках похибку наближеного розв’язку:

$$\frac{|\bar{a}-\bar{b}|}{|\bar{a}|}=\frac{|\{2,7;-0,9\}|}{\sqrt{4+9}}=\sqrt{\frac{7,29+0,81}{13}}=\sqrt{\frac{8,1}{13}}\,.$$

$$\{\bar{a}-\bar{b}\}=\{2,7;-0,9\},\quad |\bar{a}-\bar{b}|=2,85\,,\quad |\bar{a}|=3,6\,.$$

$$\frac{|\bar{a}-\bar{b}|}{|\bar{a}|}=\frac{2,85}{3,6}\cdot 100=79,2\%\,.$$

6.6 Ортогональне доповнення підпростору

Два підпростори гільбертового простору називаються ортогональними, якщо будь-який вектор із одного підпростору ортогональний до будь-якому вектору із другого підпростору.

Нехай маємо деякий підпростір *L* гільбертового простору *H*. Вся множина елементів із *H*, які не належать *L*, називається ортогональним доповненням *L*. Будь-який елемент $u \in \mathrm{H}$ можна ортогонально спроектувати на *L*: $v = Пр_L u$. При цьому $w = u - v \perp \mathrm{L}$ (мал. 6.3), отже, будь-який елемент гільбертового простору можна представити у вигляді суми елементів, які належать до *L* і до його ортогонального доповнення:

$$\forall u \in \mathrm{H}: \quad u = v + w, \quad v \in \mathrm{L}, \quad w \perp \mathrm{L}$$

Приклад 6.3. При якому значенні *k* норма функції

$$y = (x-1) \cdot |x-1| - 2x + k$$

в просторі $C_{[-2;3]}$ буде мінімальною. Накреслити графік y при мінімальній нормі.

Розв'язок. Формула містить абсолютну величину, яка наближається до нуля в точці $x = 1$. Дослідимо гілки графіка (мал. 6.4):

$$x < 1, \quad y = -(x-1)^2 - 2x + k = -x^2 + 2x - 1 - 2x + k = -x^2 - 1 + k\,.$$

$$x \geq 1, \quad y = (x-1)^2 - 2x + k = x^2 - 4x + 1 + k\,.$$

Обчислимо найбільше і найменше значення для гілок функції:

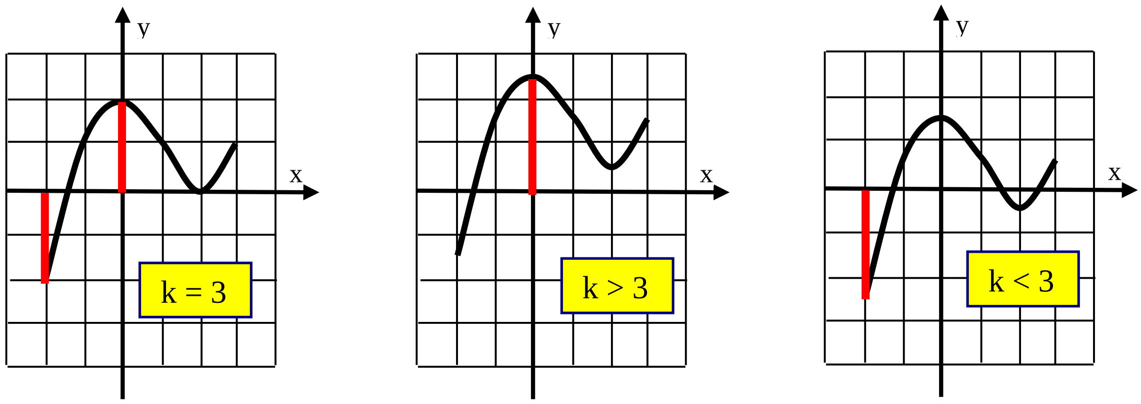
1) $x \in [-2;1]$, $y' = -2x = 0$, $y(-2) = -5 + k$, $y(0) = k - 1$, $y(1) = -2 + k$, $-5 + k \leq y \leq k$;

2) $x \in [1;3]$, $y' = 2x - 4 = 0$, $y(1) = -2 + k$, $y(2) = -3 + k$, $y(3) = -2 + k$, $-3 + k \leq y \leq -2 + k$.

На сегменті $[-2;3]$ отримуємо $\|y\| = \max(|-5+k|, |k-1|)$, тому мінімальною норма функції буде, якщо:

$$-(-5+k) = k - 1 \quad \rightarrow \quad k = 3, \quad \|y\| = 2\,.$$

При будь-яких інших значеннях *k* норма функції буде більше двох.



Малюнок 6.4

Завдання для самостійної роботи. Знайти найближчу пряму до лінії $y = 3x - x^2$ за нормою простору $L_{2[0;2]}$.

Рекомендація. В просторі $L_{2[0;2]}$ *знайти ортогональну проекцію заданої функції на лінійну оболонку* $u_1 = 1$ *та* $u_2 = x$.

7 ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

7.1 Означення і приклади операторів

У розділі «Метричні простори» було розглянуто відображення простору або, іншими словами, оператори, які кожному елементу простору E_1 ставлять у відповідність елемент простору E_2. Дуже важливу роль відіграють в математиці та її застосуваннях лінійні оператори, які діють в лінійних просторах.

7.2 Загальні властивості будь-яких операторів

1. Обмеженість. Оператор називається обмеженим, якщо кожну обмежену множину перетворює в обмежену.

Розглянемо приклад необмеженого оператора. Оператор $\mathrm{A}y = y'$ не обмежений в $C_{[a;b]}$.

Доведемо необмеженість. Розглянемо обмежену множину функцій на $[a;b]$: $y = \cos kx$, $\|\cos kx\| = 1$, $k = 1, 2, \ldots \infty$.

Оператор диференціювання перетворює цю множину в необмежену

$$\mathrm{A}(\cos kx) = -k \sin kx, \quad \|-k \sin kx\| = k, \quad k \to \infty.$$

Якщо оператор обмежений, тоді для нього можна ввести *норму оператора*. Нехай оператор A відображає простір *E* в *H*:

$$\|\mathrm{A}\| = \max \frac{\|\mathrm{Au}\|_{\mathrm{H}}}{\|\mathrm{u}\|_{\mathrm{E}}}, \quad \forall u \neq 0 \in \mathrm{E}. \tag{7.1}$$

Приклад 7.1. Розглянемо оператор A: $C_{[a;b]} \to \mathrm{R}^3$

$$\mathrm{A}f(x) = \begin{pmatrix} f(a) \\ f(c) \\ f(b) \end{pmatrix}, \quad c = \frac{a+b}{2}.$$

Обчислимо норму цього оператора:

$$\|f(x)\| = \max_{x \in [a;b]} |f(x)|.$$

$$\|\mathrm{A}f(x)\| = \sqrt{f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2} \leq \sqrt{3} \|f(x)\|.$$

Отже, $\|\mathrm{A}\| \le \sqrt{3}$. Покажемо, що для сталої функції виконується рівність:

$$f(a) = f(c) = f(b) = \|f\|, \quad в \quad C[a;b];$$
$$\|\mathrm{A}f(x)\| = \sqrt{f(a) + f(c) + f(b)} = \sqrt{3}\|f\|;$$

тому остаточно отримуємо значення норми оператора:

$$\|\mathrm{A}\| = \frac{\sqrt{3} \cdot \|f\|}{\|f\|} = \sqrt{3}\,.$$

Приклад 7.2. Розглянемо оператор ортогонального проектування. В силу нерівності Бесселя, норма ортогональної проекції елемента лінійного простору не може бути більша норми оригіналу, це наочно видно на мал. 6.3, де u - це оригінал, а v - образ. Якщо u належить подпростору, на який виконується проектування, то образ і оригінал збігаються. Отже верхня межа в нерівності (7.1) досягається і дорівнює одиниці. Висновок: оператор ортогонального проектування має одиничну норму.

2. Неперервність. Оператор називається незперервним, якщо він кожну збіжну послідовність елементів перетворює в збіжну.

Покажемо, що оператор диференціювання не є неперервним. Розглянемо послідовність функцій:

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \cos nx \underset{n \to \infty}{\to} 0\,.$$

Вона є збіжною. А її образ, отриманий диференціюванням, є розбіжною послідовністю:

$$\mathrm{Au}_\mathrm{n} = -\sqrt{n} \sin nx, \qquad \|\mathrm{Au}_\mathrm{n}\| = \sqrt{n} \quad \to \quad \infty\,.$$

3. Неперервність в точці. Оператор називають неперервним в u_0 , якщо для $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ таке, що із $\|u - u_0\| < \delta$ з цього випливає $\|Au - Au_0\| < \varepsilon$.

7.3 Властивості лінійних операторів

Оператор називається лінійним, якщо виконуються умови:

$$\mathrm{A}(x_1 + x_2) = \mathrm{A}x_1 + \mathrm{A}x_2 \text{ (адитивність)},$$
$$\mathrm{A}\,(kx) = k\mathrm{A}x \text{ (однорідність)}. \qquad (7.2)$$

1. Теорема про лінійний оператор. Для лінійного оператора властивості неперервності та обмеженості еквівалентні.

Доведення (частина 1).

Нехай А – обмежений оператор. Це означає, що норма $\|\mathrm{A}x\| < C\|x\|$, де $C - const$. Нехай $\varepsilon > 0$, візьмемо $\delta = \dfrac{\varepsilon}{C}$. Маємо:

$$\|\mathrm{A}x_1 - \mathrm{A}x_2\| = \|\mathrm{A}(x_1 - x_2)\| < C\|x_1 - x_2\| < C\delta = C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

Доведення (частина 2).

Нехай оператор неперервний. Доведемо, що він обмежений. Припустимо, що оператор необмежений, тоді:

$$\exists x_1 : \|\mathrm{A}x_1\| > \|x_1\|,\ \ \exists x_2 : \|\mathrm{A}x_2\| > 2\|x_2\|,\ \ \exists x_3 : \|\mathrm{A}x_3\| > 3\|x_3\|,\ \ ...$$

Отримаємо послідовність $x_1, x_2, x_3 \ldots$. Побудуємо послідовність:

$$u_1 = x_1 \frac{1}{\|x_1\|},\ \ u_2 = x_2 \frac{1}{\|x_2\|},\ \ u_3 = x_3 \frac{1}{\|x_3\|} ...$$

Якщо x_n – збіжна послідовність, то $u_n \to 0,\ n \to \infty$.

$$\|\mathrm{A}u_1\| = \frac{1}{\|x_1\|}\|\mathrm{A}x_1\| > \frac{1}{\|x_1\|}\|x_1\| = 1 \quad \to \quad \|\mathrm{A}u_1\| > 1$$

$$\|\mathrm{A}u_2\| = \frac{1}{\|x_2\|}\|\mathrm{A}x_2\| > \frac{1}{\|x_2\|} 2\|x_2\| = 2 \quad \to \quad \|\mathrm{A}u_2\| > 2$$

Умова $\mathrm{A}u_n \to 0$ виконуватися не буде. Прийшли до протиріччя. Оператор обмежений.

2. Обчислення норми на кулі. Виходячи із однорідності лінійного оператора, формулу (7.1) можна спростити:

$$\|\mathrm{A}\| = \max\|\mathrm{A}u\|, \quad при \quad \|u\| = 1. \tag{7.3}$$

Для застосувань важливим лінійним оператором є інтегральний оператор:

$$\mathrm{A}y(x) = \int_a^b K(x,t)\ y(t)\ dt. \tag{7.4}$$

Оператор може розглядатися в просторах $C_{[a,b]}$, $L_{2[a,b]}$. Функція $K(x, y)$ – ядро інтегрального оператора.

Будемо вважати, що ядро є неперервною функцією в області $[a,b]\times[a,b]$, тому набуває свої найбільше і найменше значення в цій області. Позначимо $\mathrm{M} = \max\limits_{x,t\in[a;b]} |K(x,t)|$.

Із властивості визначеного інтеграла випливає, що інтегральний оператор лінійний. Доведемо, що інтегральний оператор обмежений у просторі $C_{[a,b]}$.

$$\int_a^b K(x,t)\; y(t)\; dt = g(x),$$

$$\|g(x)\| = \max_{x\in[a,b]} |g(x)| = \max_{x\in[a,b]} \left| \int_a^b K(x,t)\; y(t)\; dt \right| \le$$

$$\le (b-a) \max_{x,t\in[a;b]} |K(x,t)| \max_{x\in[a;b]} |y(t)| = \|y\| (b-a) \mathrm{M},$$

$$\|\mathrm{Ay}\| \le (b-a)\mathrm{M}\|\mathrm{y}\|. \tag{7.5}$$

Це і означає, що оператор обмежений.

Відзначимо без доведення, що інтегральний оператор обмежений і в просторі L_2. На підставі теореми про лінійні оператори із цього випливає, що інтегральний оператор є і неперервний.

7.4 Спряжені оператори

Нехай заданий простір, в якому визначено скалярний добуток. Нехай маємо оператор *A*, який діє з простору *E* в той же простір. Якщо існує оператор *B*, який діє із *E* в *E* та володіє такою властивістю, що для будь-яких $x, y \in \mathrm{E}$ виконується:

$$(\mathrm{A}x, y) = (x, \mathrm{B}y), \tag{7.6}$$

то оператор *B* називається спряженим з оператором *A*. Позначається:

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}^* \tag{7.7}$$

Розглянемо спряжений оператор в просторі R^2. Елементи простору будемо позначати:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Кожен лінійний оператор в цьому просторі можна представити у вигляді матриці:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Доведемо, що спряжений оператор завжди існує та задається транспонованою матрицею (тому транспоновані матриці називають ще й спряженими):

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{A}x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{A}x, y) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)y_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)y_2, \tag{7.8}$$

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} y = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix},$$

$$(x, \mathrm{A}^{\mathrm{T}} y) = (a_{11}y_1 + a_{21}y_2)x_1 + (a_{12}y_1 + a_{22}y_2)x_2. \tag{7.9}$$

Порівнюючи праві частини формул (7.8) та (7.9), робимо висновок, що:

$$(\mathrm{A}x, y) = (x, \mathrm{A}^{\mathrm{T}} y) \tag{7.10}$$

Аналогічно доводиться, що в просторі R^n транспонована матриця задає спряжений оператор.

В просторі $L_{2[a;b]}$ оператор

$$\mathrm{Ay} = \int_a^b K(x,t)\ y(t)\ dt$$

завжди має спряжений оператор

$$\mathrm{A}^* y = \int_a^b K(t,x)\ y(t)\ dt.$$

Це випливає із рівності повторних інтегралів

$$(\mathrm{A}u, v) = (u, \mathrm{A}^* v) :$$
$$\int_a^b v(x)dx \int_a^b K(x,t)u(t)dt = \int_a^b u(x)dx \int_a^b K(t,x)v(t)dt. \tag{7.11}$$

Якщо оператор збігається зі своїм спряженим $\mathrm{A} = \mathrm{A}^*$, то він називається самоспряженим. В просторі R^n самоспряжений оператор задається симетричною матрицею. Для інтегрального оператора самоспряжений оператор – це оператор з симетричним відносно своїх аргументів ядром. Наприклад, $K(x,t) = 11x^2 - 23xt + 11t^2$.

Завдання для самостійної роботи. Показати фактичним розрахунком на скалярних добутках (7.11) та функціях $u = 2 - x^2$ і $v = xy + 1$, що інтегральний оператор з ядром $K(x,t) = x + y$ є самоспряженим на сегменті $[0;1]$.

8 ФУНКЦІОНАЛ

8.1 Поняття функціонала

Нехай оператор A діє із простору E в простір R. У цьому випадку оператор A називається функціоналом. Будемо позначати функціонали літерою U.

Приклади функціоналів:

1. Розглянемо простір, складений з матриць довільної розмірності. Для кожної матриці обчислимо максимум довжин векторів-рядків. Наприклад,

$$\mathrm{U}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 11 \\ \frac{1}{2} & -19 \end{pmatrix} = \max\left(\sqrt{13}, \sqrt{137}, \sqrt{361{,}25}\right) = \sqrt{361{,}25}\,. \tag{8.1}$$

2. В просторах $C_{[a,b]}$ або $L_{2[a,b]}$ можна визначити функціонал, який кожній функції ставить у відповідність число за правилом:

$$\mathrm{U}(f) = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{8.2}$$

3. В просторі R^n з елементами $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n)$ лінійним функціоналом є:

$$\mathrm{U}(\mathrm{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k\,. \tag{8.3}$$

Завдання для самостійної роботи:

1. Довести, що функціонал (8.1) не є лінійним: не виконується адитивність.
2. Довести, що функціонали (8.2) і (8.3) лінійні.

8.2 Норма функціонала

Так як функціонал є окремим випадком оператора, то можна визначити норму функціонала за формулою:

$$\|U\| = \max \frac{\|U(y)\|}{\|y\|}, \qquad \|y\| \neq 0.$$

Нехай $y \in C_{[a,b]}$. Розглянемо:

$$U(y) = \int_a^b f(x)\, y(x)\, dx, \tag{8.4}$$

де $f(x)$ – фіксована неперервна на $[a;b]$ функція.

$$|\mathrm{U}(y)| = \left|\int_a^b f(x)\, y(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)\, y(x)|\, dx \le (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f(x)\, y(x)| =$$

$$= (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \max_{x\in[a,b]} |y(x)|, \tag{8.5}$$

$$C = (b-a) \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, \qquad |\mathrm{U}(y)| \le \|f\|, \qquad \|\mathrm{U}\| \le C.$$

8.3 Теорема Рісса

Теорема. В гільбертовому просторі кожен лінійний обмежений функціонал *U* можна представити у вигляді :

$$\mathrm{U}(y) = (f, y), \tag{8.6}$$

де *f* – фіксований елемент простору.

Доведення. Якщо для усіх елементів простору функціонал дає нульове значення, то в якості *f* можна взяти нульовий елемент. Нехай не для всіх елементів простору значення функціонала дорівнює нулю, тоді позначимо *L* – ядро функціонала, *G* – ортогональне доповнення ядра:

$$\mathrm{H} = \mathrm{L} \oplus \mathrm{G}: \quad \exists y \in \mathrm{L} \ \rightarrow \ \mathrm{U(y)} = 0, \quad \exists y \neq 0 \in \mathrm{G} \ \rightarrow \ \mathrm{U(y)} \neq 0. \tag{8.7}$$

L і G є підпросторами, тому будь-яка лінійна комбінація з ненульовими коефіцієнтами елементів *G* є елементом *G*. Нехай:

$$y_0 \in \mathrm{G} \ \rightarrow \ \mathrm{U(y_0)} \neq 0.$$

Виявляється, що цей єдиний елемент можна вважати базисом підпростору G. Дійсно, нехай $\forall y_1 \in \mathrm{G}$, тоді і лінійна комбінація з ненульовими коефіцієнтами $z = \mathrm{U}(y_1)y_0 - \mathrm{U}(y_0)y_1$ повинна належати G. Але легко бачити, що $\mathrm{U}(z) = 0$, тобто елемент z належить L, але не G. Звідси випливає лінійна залежність будь-якого елемента із G і елемента y_0, тому, елемент y_0 – базис G. Робимо висновок:

$$\text{якщо } y \neq ky_0, \text{ то } (y, y_0) = 0, \qquad (8.8)$$

тому що в цьому випадку $y \notin G \quad \to \quad y \in L$. Із вказаного випливає, що у формулі (8.6) можна покласти:

$$f = \frac{U(y_0)}{\|y_0\|^2} y_0 \qquad (8.9)$$

Приклад 8.1. Для функціоналу

$$u(y) = \int_{-2}^{4} y(x)\, dx.$$

з'ясувати, при якому значенні *C* функція $y = |x-2| - |x+1| + C$ належить ядру функціонала. Побудувати графік цієї функції (мал. 8.1).

Розв'язання:

$$y = \begin{cases} 2 - x + x + 1 + C = 3 + C, & x \le -1, \\ 2 - x - x - 1 + C = -2x + 1 + C, & -1 < x < 2, \\ x - 2 - x - 1 + C = -3 + C, & 2 \le x, \end{cases}$$

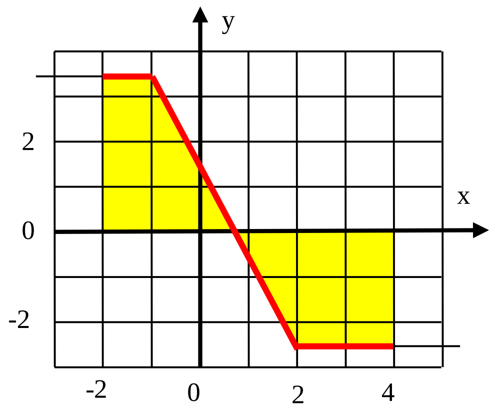
$$\int_{-2}^{-1} (3 + C)\, dx = (3 + C)\, x \,\Big|_{-2}^{-1} = (3 + C)\,(-1 - (-2)) = 3 + C,$$

$$\int_{-1}^{2} (-2x + 1 + C)\, dx = -x^2 + (1 + C)\, x \,\Big|_{-1}^{2} = [-4 + 2 \cdot (1 + C)] - [-1 - (1 + C)] = 3C,$$

$$\int_{2}^{4} (-3 + C)\, dx = (-3 + C)\, x \,\Big|_{2}^{4} = (-3 + C)\,(4 + 2) = -6 + 2C,$$

$$U(y) = 3 + C + 3C - 6 + 2C = 6C - 3 = 0, \qquad C = \frac{1}{2},$$

$$y = |x - 2| - |x + 1| + \frac{1}{2}.$$



Малюнок 8.1

9 СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ОПЕРАТОРА

9.1 Поняття спектра

Нехай оператор переводить простір сам в себе. Якщо для деякого $x \in E$, такого що $\|x\| \neq 0$, виконується властивість $\mathrm{A}x = \lambda x$, то x називається власним елементом оператора *A*, який відповідає власному числу λ.

Усеь набір власних чисел оператора називається спектром оператора. Спектр може складатися із будь-якої числової множини:

1. Порожній спектр.
2. Одне або декілька власних чисел.
3. Нескінченна множина власних чисел, всі числа спектра ізольовані або є внутрішніми.

9.2 Спектральні властивості лінійних операторів

1. Якщо *A* – лінійний оператор, власний елемент *x* відповідає λ, тоді елемент $kx = y$, $k \neq 0$ також буде власним елементом:

$$\mathrm{A}y = \mathrm{A}kx = k\mathrm{A}x = k\lambda x = \lambda(kx) = \lambda y.$$

Ця властивість дозволяє обирати власний елемент з будь-якою бажаною нормою.

2. Якщо *x*, *y* – два власних елемента, відповідних числу λ, то будь-яка їх лінійна комбінація – також власний елемент.

3. Якщо власні елементи відповідають різним власним числам, то вони лінійно незалежні:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \mathrm{A}u_1 = \lambda_1 u_1, \quad \mathrm{A}u_2 = \lambda_2 u_2,$$

$$\mathrm{A}(C_1 u_1 + C_2 u_2) = 0, \quad C_1 \mathrm{A}u_1 + C_2 \mathrm{A}u_2 = 0, \quad C_1\lambda_1 u_1 + C_2\lambda_1 u_2 = 0,,$$

$$\begin{cases} C_1 u_1 + C_2 u_2 = 0, \\ C_1\lambda_1 u_1 + C_2\lambda_2 u_2 = 0, \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 \end{vmatrix} = u_1\lambda_2 u_2 - u_1\lambda_1 u_2 = u_1 u_2(\lambda_2 - \lambda_1), \quad u_1 \neq 0, \quad u_2 \neq 0\,.$$

Головний визначник однорідної системи не дорівнює нулю, із теореми Крамера випливає, що система має тільки тривіальне рішення $C_1 = C_2 = C$. Елементи $u_1,\ u_2$ – лінійно незалежні.

4. Нехай A – самоспряжений оператор, тоді якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2$ то u_1, u_2 ортогональні:

$$(\mathrm{A}u_1, u_2) - (u_1, \mathrm{A}u_2) = 0,$$
$$(\lambda_1 u_1, u_2) - (u_1, \lambda_2 u_2) = 0, \qquad \lambda_1 (u_1, u_2) - \lambda_2 (u_1, u_2) = 0,$$
$$(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0, \qquad (u_1, u_2) = 0. \tag{9.1}$$

Приклад 9.1. Знайти спектр оператора в R^2 з матрицею:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\mathrm{A}x = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -3x_1 + 8x_2 \\ x_1 - 5x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} -3x_1 + 8x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 - 5x_2 = \lambda x_2 \end{cases},$$
$$\begin{cases} (-3-\lambda)x_1 + 8x_2 = 0 \\ x_1 + (-5-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}, \qquad (x_1^2 + x_2^2) \neq 0,$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 8 \\ 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = (-3-\lambda)(-5-\lambda) - 8 = 0,$$
$$\lambda^2 + 8\lambda + 7 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -7.$$

Спектр цього оператора складається з двох різних чисел.
Для кожного числа із спектра знайдемо власний вектор:

$$\lambda_1 = -1, \qquad \begin{cases} -2x_1 + 8x_2 = 0 \\ x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}.$$

Рівняння еквівалентні. Власним вектором можна вважати:

$$\bar{a}_1 = (4;1).$$
$$\lambda_2 = -7, \qquad \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}, \qquad \bar{a}_2 = (-2;1).$$

Перевірка:

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12+8 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+8 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = (-7)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 9.2. Знайти спектр оператора в просторі $L_{2[0;1]}$

$$\mathrm{A}y=\int_0^1 (10t-3x)y(t)dt\,.$$

Розв'язання:

$$\mathrm{A}y=\int_0^1 10ty(t)dt-3x\int_0^1 y(t)\,dt=b+cx\,.$$

Образом будь-якої функції y є лінійна функція, тому і власною може бути тільки лінійна функція $y(x)=b+cx$.

$$\mathrm{A}y=\int_0^1 (10t-3x)(b+ct)\,dt=\int_0^1 (10bt-3bx+10ct^2-3ctx)dt=$$

$$=\int_0^1 (10b-3cx)tdt+10c\int_0^1 t^2dt-3bx\int_0^1 dt=(10b-3cx)\frac{t^2}{2}+10c\frac{t^3}{3}-3bxt\Big|_0^1=$$

$$=(10b-3cx)\frac{1}{2}+10c\frac{1}{3}-3bx=\lambda(b+cx);$$

$$(5b+\frac{10}{3}c)+(-\frac{3}{2}c-3b)x=\lambda u+\lambda cx\,. \qquad (9.2)$$

Рівність (9.2) має виконуватися при будь-якому x, тому можна дорівнювати коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частинах рівності:

$$\begin{cases}5b+\frac{10}{3}c=\lambda b\\ -\frac{3}{2}c-3b=\lambda c\end{cases},\quad \begin{cases}(5-\lambda)b+\frac{10}{3}c=0\\ -3b+(-\frac{3}{2}-\lambda)c=0\end{cases},\quad \Delta=\begin{vmatrix}5-\lambda & \frac{10}{3}\\ -3 & -\frac{3}{2}-\lambda\end{vmatrix}=0\,;$$

$$(5-\lambda)\,(-\frac{3}{2}-\lambda)+10=0\,,\quad \lambda_1=1\,,\ \lambda_2=\frac{5}{2};$$

$$\lambda_1=1\ :\ \begin{cases}4b+\frac{10}{3}c=0\\ -3b-\frac{5}{2}c=0\end{cases},\quad \begin{cases}12b+20c=0\\ 6b+5c=0\end{cases},\ b=-5\,,\ c=6\,,\quad y_1=6x-5\,;$$

$$\lambda_2=\frac{5}{2}\ :\ \begin{cases}\frac{5}{2}b+\frac{10}{3}c=0\\ -3b-4c=0\end{cases},\quad \begin{cases}15b+20c=0\\ 3b+4c=0\end{cases},\quad a=-4\,,\ b=3\,,\quad y_2=3x-4\,.$$

Приклад 9.3. Знайти спектр оператора в просторі $L_{2[0;1]}$

$$\mathrm{A}y = \int_0^1 e^{kx-nt} y(t)\, dt .$$

Розв’язання.

$$\mathrm{A}y = \int_0^1 e^{kx-nt} y(t)\, dt = ce^{kx}, \qquad y = ce^{kx},$$

$$\mathrm{A}y = e^{kx}\int_0^1 e^{(k-n)t} dt = ce^{kx},$$

Розглянемо два випадки:

$$k = n: \qquad \int_0^1 dt = 1, \qquad \lambda = 1, \qquad y = e^{kx} .$$

$$k \neq n: \quad \int_0^1 e^{(k-n)t}\, dt = \frac{1}{k-n}\, e^{(k-n)t}\Big|_0^1 = \frac{e^{k-n}-1}{k-n},$$

$$\lambda = \frac{e^{k-n}-1}{k-n}, \qquad\qquad y = e^{nx} .$$

Приклад 9.4. Знайти спектр оператора в просторі $L_{2[0;1]}$

$$\mathrm{A} = \int_0^1 \cos(x-t)\; y(t)\, dt .$$

Розв’язання.

$$\mathrm{A}y = \cos x \int_{-\pi}^{\pi} \cos t\; y(t)\, dt + \sin x \int_{-\pi}^{\pi} \sin t\; y(t)\, dt = a \cos x + b \sin x ;$$

$$y = a \cos x + b \sin x ;$$

$$J_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t (a \cos t + b \sin t)\, dt = a \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, dt + b \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t\, dt = a\pi ;$$

$$J_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t (a \cos t + b \sin t)\, dt = a \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t\, dt + b \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\, dt = b\pi ;$$

$$\lambda\big(a \cos x + b \sin x\big) = a\pi \cos x + b\pi \sin x , \qquad \lambda = \pi .$$

Спектр оператора складається із одного числа π, але оболонка двовимірна:

$$y_1(x) = \cos x\,,\ \ y_2(x) = \sin x\,.$$

10 ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Інтегральним називається рівняння, в якому невідома функція знаходиться під знаком інтеграла. Відмітимо найважливіші види інтегральних рівнянь. Із усіх багаточисленних видів інтегральних рівнянь розглянемо ті, які найбільш часто зустрічаються у застосуваннях математики:

1. Рівняння, які містять інтеграл з постійними межами:

$$\int_a^b K\,(x,t)\; y(t)\; dt,$$

відносяться до рівнянь Фредгольма.

2. Рівняння, які містять змінну межу інтегрування:

$$\int_a^x K\,(x,t)\; y(t)\; dt,$$

називають інтегральним рівнянням Вольтерра.

10.1 Основи рівняння Фредгольма

Розглянемо рівняння:

$$\int_a^b K(x,t)\; y(t)\; dt = g(x). \tag{10.1}$$

Це рівняння Фредгольма першого роду. Така постановка задачі є не цілком коректною. Для розв'язання такого рівняння права частина повинна бути спеціально підібрана: повинна належати образу функціонального простору при відображенні інтегральним оператором. Більш часто на практиці зустрічаються рівняння Фредгольма другого роду:

$$\lambda \int_a^b K(x,t)\; y(t)\; dt + g(x) = y(x). \tag{10.2}$$

Тут *y(x)* – невідома функція, а *g(x)* – задана функція. В разі $g(x) \equiv 0$ рівняння Фредгольма називають однорідним. У загальному випадку розв’язання інтегральних рівнянь представляє значну математичну проблему. Можливість розв'язання рівняння тісно пов'язана зі спектральним аналізом інтегрального оператора.

Найбільш простим випадком для розв'язання рівняння Фредгольма є ситуація, коли ядро вироджене

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\, v_i(t)\,. \tag{10.3}$$

Приклад 10.1. Розв'язати рівняння:

$$3\int_{-2}^{1} x^2 t\ y(t)\ dt + 6x - 3 = y(x)\,.$$

Розв'язання:

$$3x^2 \int_{-2}^{1} t\ y(t)\ dt + 6x - 3 = y(x)\,, \qquad y = cx^2 + 6x - 3\,;$$

$$\int_{-2}^{1} t\ (ct^2 + 6t - 3)\ dt = \int_{-2}^{1} (ct^3 + 6t^2 - 3t)\ dt = \left(\frac{c}{4}t^4 + 2t^3 - \frac{3}{2}t^2\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{c}{4} + 2 - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{16}{4}c - 16 + \frac{12}{2}\right) = -\frac{15}{4}c - 14 - \frac{15}{2} = -\frac{15}{4}c - \frac{43}{2}\,;$$

$$3x^2\left(-\frac{15}{4}c - \frac{43}{2}\right) + 6x - 3 = cx^2 + 6x - 3\,;$$

$$c = \frac{162}{49}\,, \qquad y = \frac{162}{49}x^2 + 6x - 3\,.$$

11.2 Інтегральне рівняння Вольтерра

Розглянемо найпростіший випадок інтегрального рівняння Вольтерра:

$$m\int_{a}^{x} K(x,t)\, y(t)\ dt + g(x) = y(x)\,,$$

тобто ядро оператора не залежить від зовнішньої змінної.

$$m\int_{a}^{x} f(t) y(t)\ \mathrm{d}t + \mathrm{g}(\mathrm{x}) = y(x)\,. \tag{10.4}$$

Таке рівняння можна перетворити в відомий із математичного аналізу вид диференціального рівняння. Для цього, користуючись властивістю інтеграла зі змінною верхньою межею, необхідно взяти похідну від лівої і правої частини (10.4).

Приклад 10.2. Розв’язати рівняння:

$$4\int_1^x \frac{y(t)}{t}\,dt = 11x^3 + y(x).$$

Розв’язання:

$$4\frac{y(x)}{x} = 33x^2 + y'(x), \qquad y' - \frac{4}{x}y = -33x^2;$$

$$y = uv, \qquad u'v + uv' - \frac{4}{x}uv = -33x^2;$$

$$v' - \frac{4}{x}v = 0, \qquad v = x^4,$$

$$u'x^4 = -33x^2, \quad u = \frac{33}{x} + c;$$

$$y = x^4 \cdot \left(\frac{33}{x} + c\right) = 33x^3 + cx^4.$$

Для обчислення константи c у задане рівняння підставимо знайдену формулу для y і $x = 1$:

$$0 = 11 + c + 33, \qquad c = -44, \qquad y = -44x^4 + 33x^3.$$

Перевірка:

$$4\int_1^x \frac{33t^3 - 44t^4}{t}\,dt = 4\int_1^x \left(33t^2 - 44t^3\right)dt = 4\left(11t^3 - 11x^4\right)\Big|_1^x =$$

$$= 4\left((11x^3 - 11x^4) - (11 - 11)\right) = 44x^3 - 44x^4;$$

$$44x^3 - 44x^4 = 11x^3 + \left(-44x^4 + 33x^3\right).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Березанський Ю. М. Функціональний аналіз / Ю. М. Березанський, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. – Львів : Університетська бібліотека, 2015. – 559 с., ISBN 978-966-2645-12-5.

2. Підкуйко С.І. Функціональні послідовності та ряди / С.І. Підкуйко, М.В. Баб'як. – Львів : Число, 2015. – 184 с., ISBN 978-966-2645-07-1.

В.М. Кадець, Курс функціонального аналізу та теорії міри. Університетська бібліотека. 2015. – 590 с., ISBN 978-966-2645-02-6.

3. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1968. – 493 с.

4. Сторож О. Г. Збірник задач з теорії міри і функціонального аналізу / О. Г. Сторож. – Львів : Число, 2015. – 152 с., ISBN 978-966-2645-00-2.

5. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной / И. П. Натансон. – М. : Наука, 1974. – 480 с.

6. Люстерник Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 398 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки
до практичних занять та самостійної роботи
з дисципліни
«Функціональний аналіз»
для студентів спеціальності 014 «Середня освіта (Математика)»

Укладачі РОВЕНСЬКА Ольга Геннадіївна
АСТАХОВ Віктор Миколайович

За авторською редакцією
Комп'ютерна верстка О. Г. Ровенська

120/2009. Формат 60 х 84/16. Ум. друк. арк.
Обл.-вид. арк. 2,27. Тираж 300 прим. Зам. № 31.

Видавець і виготівник
«Донбаська державна машинобудівна академія»
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК №1633 від 24.12.2003.